Une analyse de la conjecture de Syracuse démonstration

Mhammed Ettioutioui

▶ To cite this version:

Mhammed Ettioutioui. Une analyse de la conjecture de Syracuse démonstration. 2023. ensl-03966598v1

HAL Id: ensl-03966598
https://ens-lyon.hal.science/ensl-03966598v1

Preprint submitted on 31 Jan 2023 (v1), last revised 5 Dec 2023 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une analyse de la conjecture de Syracuse démonstration

Mhammed Ettioutioui

Soumis le 31 janvier 2023

Abstract

We give in this paper a proof of the Syracuse conjecture. We consider the inverse sequence and modular studies.

Résumé

Nous donnons dans cet article une démonstration de la conjecture de Syracuse en faisant appel à une suite inverse et en utilisant une représentation modulaire.

1 Introduction.

La suite de Syracuse est définie par :

$$S_{n+1} = \begin{cases} \frac{S_n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3S_n + 1 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1}$$

L'itération de cette suite en partant d'une valeur initiale semble aboutir à 1 après un nombre d'étapes. Ceci constitue la conjecture de Syracuse :

Conjecture. *Pour tout entier N, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $S_n(N) = 1$.*

Elle a été étudiée de différentes manières. On renvoi à l'article de Luc-Olivier Pochon et Alain Favre [P-F] qui est très fourni et constitue une référence extrêmement complète sur les différentes pistes et avancées sur ce sujet. Lire aussi l'article de Jean-Paul Delahaye [D] .
On va considérer la suite inverse en définissant les fonctions :

$$\begin{cases} a(n) & = 2n \\ b(n) & = \frac{n-1}{3} \qquad \text{si } n \equiv 1[3] \end{cases} \tag{2}$$

On définit l'ensemble E_0 formé de toutes les images de 1 par les itérations des applications a et b (quand c'est possible). Il est facile de voir l'équivalence suivante :

Lemme. *Pour tout entier N, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $S_n(N) = 1$ est équivalent à l'ensemble E_0 est égal à l'ensemble $\mathbb{N}$.*

Remarque. *La condition de parité ou non est remplacée par une condition sur l'application b moins contraignante.*

On démontre :

théorème. ***(A)*** *L'ensemble E_0 est égale à $\mathbb{N}$.*

2 Propriétés et résultats

2.1 Analyse des fonctions a et b.

L'ensemble E_0 est formé de tous les éléments qui sont les images itérées de 1 par les applications a et b lorsque c'est possible.
On a les propriétés suivantes :

- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $a^{(k)}(1) = 2^k \in E_0$.
- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} b(4^k) &= \tfrac{4^k-1}{3} \\ &= \tfrac{4^k-1}{4-1} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} 4^i \in E_0. \end{aligned}$$

- Si $n \in E_0$ alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a $a^{(k)}(n) = 2^k n \in E_0$ $\big(a^{(k)}$ est la $k^{\text{ème}}$ itération de $a\big)$.
- Si $n \in E_0$ et $n \equiv 1[3]$, alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} b(4^k n) &= \tfrac{4^k n-1}{3} \\ &= \tfrac{4^k n-4^k+4^k-1}{3} \\ &= 4^k b(n) + b(4^k) \in E_0. \end{aligned}$$

- Si $n \in E_0$ et $n \equiv 2[3]$, alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} b(2^{2k+1} n) &= \tfrac{2^{2k+1} n-1}{3} \\ &= \tfrac{2^{2k+1} n-2^{2k}+2^{2k}-1}{3} \\ &= 4^k b(2n) + b(4^k) \in E_0. \end{aligned}$$

- Si $n \in E_0$ et n est impair, alors $b^{-1}(n)$ appartient à E_0.

De ces propriétés, on déduit la proposition suivante :

Proposition. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :*

- *si $3k \in E_0$ alors $4k \in E_0$*
- *si $3k+1 \in E_0$ alors $4k+1 \in E_0$*
- *si $3k+2 \in E_0$ alors $2k+1$ et $4k+2 \in E_0$*

Démonstration : Si $3k \in E_0$ alors $9k+1 \in E_0$. Donc $36k+4 \in E_0$ et par suite $12k+1 \in E_0$, finalement $4k \in E_0$. Si $3k+1 \in E_0$ alors $12k+4 \in E_0$. Donc $4k+1 \in E_0$. Si $3k+2 \in E_0$ alors $6k+4 \in E_0$. Donc $2k+1 \in E_0$ et $4k+2 \in E_0$. $\square$
Démonstration du théorème (A) :
L'ensemble E_0 n'est pas vide. Supposons que pour n un entier donné, l'ensemble E_0 contient tous les entiers plus petits que n. On a les trois cas suivants :

1. Si $n = 4k$ donc $3k + 1 \in E_0$ et d'après la proposition 1, $4k + 1 = n + 1 \in E_0$.
2. Si $n = 4k + 1$ donc $3k + 2 \in E_0$ et d'après la proposition 1, $4k + 2 = n + 1 \in E_0$.
3. Si $n = 4k + 3$ donc $3k + 3 = 3(k + 1) \in E_0$ et d'après la proposition 1, $4(k + 1) = n + 1 \in E_0$.

On en conclut que $n + 1 \in E_0$ et donc $E_0 = \mathbb{N}$. $\square$

2.2 Étude modulaire.

Cette partie est consacrée à une étude qui permet de voir des propriétés supplémentaires des applications a et b. On remarque que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{4^{9k} - 1}{3} \equiv 0[9] \qquad et \qquad 4^{9k} \equiv 1[9]$$

Et pour tout entier $\alpha \in [\![0, 8]\!]$, on a :

$$\frac{4^{9k+\alpha} - 1}{3} = \frac{4^{9k+\alpha} - 4^{9k} + 4^{9k} - 1}{3} = 4^{9k}\frac{4^{\alpha} - 1}{3} + \frac{4^{9k} - 1}{3}.$$

Donc, on a le tableau suivant :

α	$\frac{4^{\alpha}-1}{3}$	$\frac{4^{\alpha}-1}{3}$mod 9 $= \frac{4^{9k+\alpha}-1}{3}$ mod 9
0	0	0
1	1	1
2	5	5
3	21	3
4	85	4
5	341	8
6	1365	6
7	5461	7
8	21845	2

On les cas suivant les valeurs $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
9 \times 3k + 1 = 27k + 1 &\xrightarrow{b} 9k \\
9 \times 3k + 4 = 27k + 4 &\xrightarrow{b} 9k + 1 \\
9 \times 3k + 7 = 27k + 7 &\xrightarrow{b} 9k + 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9(3k + 1) + 1 = 27k + 10 &\xrightarrow{b} 9k + 3 \\
9(3k + 1) + 4 = 27k + 13 &\xrightarrow{b} 9k + 4 \\
9(3k + 1) + 7 = 27k + 16 &\xrightarrow{b} 9k + 5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9(3k + 2) + 1 = 27k + 19 &\xrightarrow{b} 9k + 6 \\
9(3k + 2) + 4 = 27k + 22 &\xrightarrow{b} 9k + 7 \\
9(3k + 2) + 7 = 27k + 25 &\xrightarrow{b} 9k + 8
\end{aligned}$$

Ces remarques conduisent à une étude modulo 9 (moins triviale que modulo 3) et à une représentation graphique de $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ sur un cercle.
L'application a sur $\mathbb{N}$ peut être associée à une permutation de $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$. Donc induit une action sur cet ensemble. L'application b n'est pas définie sur $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ mais on peut construire des transformations qui lui correspondent.

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \\ & n & \longmapsto & \dot{n} \end{array}$$

Les représentations de $\varphi \circ a$ et $\varphi \circ b$ sont données par les diagrammes des figures 2.2 et 2.2. (Nous n'allons pas écrire les expressions de ces éléments).

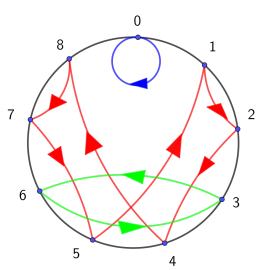

Figure 2.1 : Action de a sur $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$

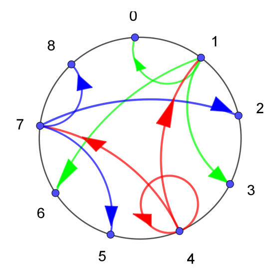

Figure 2.2 : "Action" de b sur $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$

On a trois cycles qui correspondent aux parties de classes stables par l'action de a :

$\dot{C}_0 = \{\dot{0}\}$,

$\dot{C}_3 = \{\dot{3}; \dot{6}\}$ et

$\dot{C}_1 = \{\dot{1}; \dot{2}; \dot{4}; \dot{5}; \dot{7}; \dot{8}\}$. Cette dernière partie est formée de tous les éléments inversibles dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, donc c'est un groupe.
L'application b n'est pas définie pour tous les éléments de $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.
Si $n \in \mathbb{N}\backslash 3\mathbb{N}$, alors $\dot{n} \in \dot{C}_1 = \{\dot{1}; \dot{2}; \dot{4}; \dot{5}; \dot{7}; \dot{8}\}$.

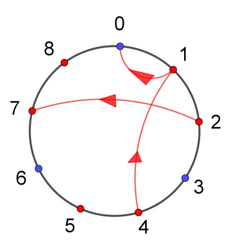

Figure 2.3 : 0 modulo 3

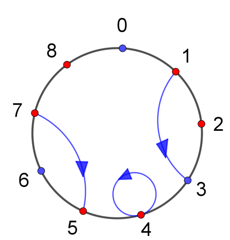

Figure 2.4 : 1 modulo 3

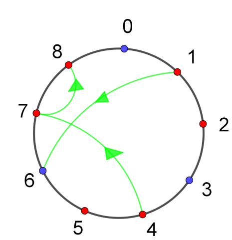

Figure 2.5 : 2 modulo 3

Lemme. *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}\backslash 3\mathbb{N}$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $b(a^{(k)}(n)) \equiv 0[3]$.*

Lemme. *Pour tout $l \in \mathbb{N}$, il existe un entiers $n \in E_0$ tel que $b(n) = 3l$.*

On considère un entier l. L'équation : $b(n) = 3l$ devient $n = 9l + 1$. l'entier n existe bien et il suffit de montrer qu'il est dans E_0. Le nombre n vérifie

$$n \notin 3\mathbb{N} \text{ et } n \equiv 1[9]$$

Lemme. *L'image de E_0 par l'application φ est égale à b sur $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.*

3 Éxtentions possibles.

- Trouver le nombre d'étape pour atteindre une hauteur donnée.
- Trouver l'altitude maximale.
- On considère deux entiers p et q non nuls et premiers entre eux. La suite de nombres :

$$S_{n+1} = \begin{cases} \frac{S_n}{p} & \text{si } n \equiv 0[p] \\ qS_n + 1 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3}$$

La question est : « Que peut-on dire de cette suite suivant les couples $(p; q)$ considérés ? »

Il semble que le théorème de Bésout intervient dans cette étude.

References

[P-F] Luc-Olivier Pochon et Alain Favre, La suite de Syracuse, un monde de conjectures, HALL open science, 22 Apr 2021.

[D] Jean-Paul Delahaye, La tenace conjecture de Syracuse, POUR LA SCIENCE N° 529, 14 octobre 2021.