УДК 517.925.7

О СЕМЕЙСТВАХ ПЕРЕМЫЧЕК В МОДЕЛИ СИЛЬНО ШУНТИРОВАННОГО ДЖОЗЕФСОНОВСКОГО ПЕРЕХОДА

Ю.П.Бибило, А.А.Глуцюк*

Эффект туннелирования, предсказанный Б.Джозефсоном в 1962 г. [7] (Нобелевская премия по физике за 1973 г.), относится к системе двух сверхпроводников, разделенных тонким диэлектриком. Он состоит в том, что если диэлектрик достаточно тонок, то через систему (называемую *Джозефсоновским переходом*) потечет сверхпроводящий ток, описанный уравнениями Джозефсона. В статье исследуется модель *сильно шунтированного перехода Джозефсона* (см. [3] и библ.), задаваемая семейством уравнений

$$\frac{d\phi}{dt} = -\sin\phi + B + A\cos\omega t,\ \omega > 0,\ B \geq 0. \tag{0.1}$$

Здесь ϕ - это разность фаз (аргументов) комплекснозначных волновых функций, описывающих состояния двух сверхпроводников. Ее производная равна напряжению, с точностью до известного постоянного множителя. Константа ω, называемая *частотой,* фиксирована; $(B, A) \in \mathbb{R}^2$ – параметры уравнения (0.1); B – абсцисса, A – ордината.

Замены $\tau = \omega t$, $\ell = \frac{B}{\omega}$, $\mu = \frac{A}{2\omega}$ переводят (0.1) в уравнение на торе $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2_{(\phi,\tau)}/2\pi\mathbb{Z}^2$: $\frac{d\phi}{d\tau} = -\frac{\sin\phi}{\omega} + \ell + 2\mu\cos\tau$. Графики его решений – орбиты векторного поля на $\mathbb{T}^2$:

$$\begin{cases} \dot\phi = -\frac{\sin\phi}{\omega} + \ell + 2\mu\cos\tau \\ \dot\tau = 1 \end{cases}. \tag{0.2}$$

Его *числом вращения*, см. [1, p. 97], называется функция $\rho(B, A; \omega) = \lim_{k\to+\infty} \frac{\phi(2\pi k)}{2\pi k}$, которая, как известно, корректно определена и не зависит от выбора решения $\phi(\tau)$. *Зоной фазового захвата* (см. [4, определение 1.1]) называется множество уровня $L_r = L_r(\omega) = \{\rho(B, A) = r\} \subset \mathbb{R}^2$, если оно имеет непустую внутренность (аналог языков Арнольда [1, стр. 103].) Известно, что зоны захвата существуют только для целых чисел вращения [3]. Каждая из них – гирлянда из бесконечного числа связных компонент; любые две соседние компоненты разделены точкой, называемой *перемычкой,* если она не лежит на оси абсцисс A, и *точкой роста,* если лежит ([8] и библ.). См. Рис. 1.

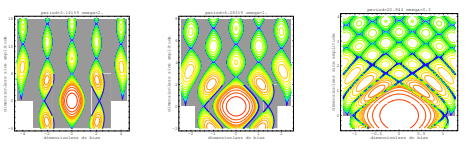


Рис. 1: зоны захвата для $\omega = 2, 1, 0.3$ [2, рис.1а,б,д].

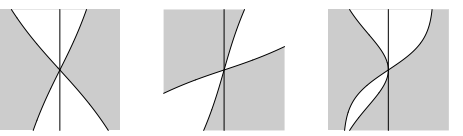


Рис. 2 (С.И.Тертычный): типы перемычек.

Перемычки задаются двумя условиями: отображение потока поля (0.2) за время 2π тождественно, и $A \neq 0$ [4]. Основные результаты статьи - это следующие две теоремы.

Теорема 1. *В каждой зоне захвата все перемычки лежат на одной вертикальной прямой с абсциссой $B = \rho\omega$, где $\rho \in \mathbb{Z}$ – соответствующее ей число вращения.*

Теорема 1 подтверждает экспериментальный факт, обнаруженный С.И.Тертычным, В.А.Клепцыным, Д.А.Филимоновым и И.В.Щуровым, сформулированный в виде гипотезы в [4], где доказано, что абсциссы перемычек - целочисленные кратные ω.

Перемычка зоны захвата *положительна (отрицательна),* если ее некоторая проколотая окрестность на вертикальной прямой лежит строго внутри (снаружи) зоны захвата, и *нейтральна,* если ни одно из этих условий не выполнено. См. Рис. 2.

*Исследования А.А.Глуцюка поддержаны грантом РНФ 18-41-05003

Теорема 2. *Для любой частоты ω все перемычки зон захвата положительны.*

Теорема 2 подтверждает гипотезу из [5], где доказано, что нейтральных перемычек нет. Перемычки, либо имеющие абсциссу $B \neq \rho\omega$, либо неположительные, будем называть *призрачными.* Теоремы 1 и 2 утверждают, что *призрачных перемычек нет.*

Схема доказательства. (Полный текст – в https://arxiv.org/abs/2011.07839) Предположим противное: существует призрачная перемычка. Показано, что ее можно продеформировать в другую, со сколь угодно малой ω, сохраняя $\ell := \frac{B}{\omega} \in \mathbb{Z}$. Доказательство основано на эквивалентном описании модели (0.1) 3-параметрическим семейством линейных систем уравнений т.н. типа Джозефсона на сфере Римана (см. [3] и библ., а также [4, 5]). Исследуются их изомонодромные деформации в 4-мерном семействе т.н. систем типа Джимбо, описывающиеся решениями уравнений Пенлеве 3, см. [6]. Перемычки отвечают системам с тривиальной монодромией [4]. Показано, что системы Джозефсона отвечают простым полюсам решений уравнения Пенлеве 3 и образуют трансверсальное сечение к изомонодромным семействам. Это позволяет деформировать системы Джозефсона с тривиальной монодромией в аналогичные системы со сколь угодно малыми ω. Для каждого $\ell \in \mathbb{Z}$ отсутствие призрачных перемычек с $B/\omega = \ell$ при всех достаточно малых ω доказывается методами теории быстро-медленных систем.

Авторы благодарны В.М.Бухштаберу и Ю.С.Ильяшенко, привлекшим их внимание к задачам модели перехода Джозефсона, и им и М.Бертола, И.В.Вьюгину, В.И.Громаку, Э.Жису, М.Мацокко, В.Ю.Новокшенову, В.Н.Рубцову, И.В.Щурову за полезные обсуждения, и С.И.Тертычному за рисунок трёх типов перемычек.

Список литературы

[**1**] Арнольд, В.И. *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* М., Наука, 1978. [**2**] Бухштабер, В.М.; Глуцюк, А.А., Тр. МИАН, **297** (2017), 62-104. [**3**] Бухштабер, В.М.; Карпов, О. В.; Тертычный, С.И. ТМФ, **162:2** (2010), 254-265. [**4**] Глуцюк, А.А.; Клепцын, В.А.; Филимонов, Д.А.; Щуров, И.В., Функц. анал. и его прил., **48:4** (2014), 47-64. [**5**] Glutsyuk A., J. Dyn. Contr. Syst. **25:3** (2019), 323-349. [**6**] Jimbo, M., Publ. RIMS, Kyoto Univ. **18:3** (1982), 1137-1161. [**7**] Josephson, B.D., Phys. Lett., **1:7** (1962), 251-253. [**8**] Klimenko, A.V; Romaskevich, O.L., Mosc. Math. J., **14:2** (2014), 367-384.

Ю.П.Бибило (Y.Bibilo).
Университет Торонто, Миссисога, Канада; ИППИ, Москва
E-mail: y.bibilo@gmail.com

А.А.Глуцюк (A.A.Glutsyuk).
CNRS, Франция (UMPA, ENS de Lyon; ISC J.-V.Poncelet);
Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"
E-mail: aglutsyu@ens-lyon.fr