Séminaire BOURBAKI Janvier 2018
70ème année, 2017-2018, n$^{\text{o}}$ 1143

DES POINTS VORTEX AUX EQUATIONS DE NAVIER-STOKES [d'après P.-E. Jabin et Z. Wang]

par **Laure SAINT–RAYMOND**

INTRODUCTION

Le problème considéré ici est une question classique en mécanique statistique : il s'agit de décrire le comportement asymptotique d'un système de particules identiques en interaction, quand le nombre de ces particules N est très grand, i.e. d'obtenir une **loi des grands nombres** pour des variables qui ne sont pas complètement indépendantes.

En régime de champ moyen, les interactions des particules deux à deux sont relativement faibles et ce n'est que parce qu'on en fait la somme qu'on obtient un effet macroscopique. En particulier, on s'attend à pouvoir négliger les corrélations d'un nombre fini de particules fixées (propriété de chaos), et à décrire le comportement asymptotique uniquement en termes de la fonction de distribution à une particule (équation de champ moyen). Cette heuristique montre néanmoins que la propriété de chaos et l'équation de champ moyen vont être d'autant plus difficiles à obtenir que **l'interaction microscopique est singulière**. Le cas des vortex qui sera discuté ici correspond à une interaction en $1/|x|$ au voisinage de l'origine.

L'étude des états d'équilibre de ce système a fait l'objet de très nombreux travaux, référencés souvent sous l'appellation de log-gaz en référence au potentiel d'interaction qui est logarithmique, et dont certains concernent en fait les statistiques de matrices aléatoires (voir par exemple [5, 14, 2, 3, 17]). La plupart de ces travaux s'appuient sur des formulations variationnelles du problème. En effet, à température nulle, les équilibres minimisent l'énergie du système. A température positive, on introduit l'entropie pour tenir compte des effets d'agitation thermique (fonctionnelle de déviation) et on peut se ramener aussi à un problème de minimisation pour l'énergie libre. Le cas dynamique auquel on s'intéresse ici est plus délicat car les **équations d'évolution** n'ont pas cette structure variationnelle. On verra néanmoins que l'entropie joue un rôle important dans la preuve, car elle mesure - en un certain sens - la stabilité du système.

1. LA LIMITE DE CHAMP MOYEN

1.1. Dynamique stochastique des points vortex

Le point de départ est le système de points vortex sur le tore de dimension 2

$$dX_i = \frac{1}{N}\sum_{j\neq i} K(X_i - X_j)dt + \sqrt{2\sigma_N}dW_i, \qquad i = 1,\dots,N \tag{1}$$

où K est le noyau de Biot-Savart , i.e. le noyau de l'opérateur $-\nabla^\perp(-\Delta)^{-1}$ sur le tore

$$K(x) = \alpha\frac{x^\perp}{|x|^2} + K_0(x) \text{ avec } K_0 \text{ régulier}.$$

Par définition, la vitesse d'advection $u_i(X_i)$ du vortex i satisfait

$$\nabla^\perp \cdot u_i = \frac{1}{N}\sum_{j\neq i}\delta_{X_j} \quad \text{ et } \quad \nabla\cdot u_i = 0\,,$$

Le flot est donc incompressible et le rotationnel du champ de vitesses est donné par la distribution empirique des vortex.

Les Browniens W_i, qui sont supposés indépendants, introduisent une diffusion autour des trajectoires déterministes, qui peut être interprétée comme une agitation thermique. Les vortex correspondent en effet à des “macro-particules" de fluide qui n'ont pas de réalité physique et qui sont elles-mêmes constituées de nombreuses molécules avec une distribution de vitesses qui n'est en général pas monocinétique.

Remarque 1.1. — Ici, pour étudier la limite de champ moyen, on doit supposer que toutes les particules sont échangeables, donc la vorticité associée à chaque point vortex est identiquement égale à 1. Si on voulait traiter le cas d'une vorticité signée, il faudrait considérer deux espèces avec vorticité ± 1. L'existence même de solutions pour le système est alors beaucoup plus délicate car elle nécessite de contrôler les possibles collisions entre vortex (voir [19] par exemple).

Le système d'équations différentielles stochastiques (1) doit être complété par une donnée initiale $(X_i(0))_{1\leq i\leq N}$ qui peut être fixée, ou obéir à une loi de probabilité qu'on se donne. On considérera plutôt ce second cas, et on imposera que les différentes positions sont indépendantes et identiquement distribuées.

Remarque 1.2. — Dans le cas d'un domaine à bord, il faut prescrire en outre l'interaction des vortex avec le bord. La phénoménologie de cette interaction est complexe, et la condition qui assurerait le non glissement $u = 0$ au bord est non locale et non linéaire.

En l'absence de bruit, il est facile de voir que le système de points vortex est une forme de discrétisation (qui est d'ailleurs utilisée pour certaines simulations numériques [13]) de l'équation d'Euler 2D

$$\partial_t u + u\cdot\nabla u + \nabla p = 0, \qquad \nabla\cdot u = 0\,,$$

équation qui se réécrit en formulation vorticité

$$\partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho = 0, \qquad u = \int_{\Pi^2} K(x-y)\rho(y)dy\,. \tag{2}$$

En effet, si on définit la mesure empirique du système de vortex par

$$\mu_N(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{X_i(t)}$$

on obtient que

$$\partial_t \mu_N + \nabla \cdot (K * \mu_N \mu_N) = 0$$

puisque le terme d'auto-corrélation s'annule par symétrie :

$$\begin{aligned}\partial_t \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \varphi(X_i) &= -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \nabla\varphi(X_i)\cdot \frac{1}{N}\sum_{j\neq i} K(X_i - X_j)\\ &= \frac{1}{2N^2}\sum_{i,j=1}^N K(X_i-X_j)\cdot(\nabla\varphi(X_i) - \nabla\varphi(X_j))\end{aligned}$$

Le bruit introduit un terme supplémentaire de diffusion que l'on calcule par intégration stochastique. On obtient ainsi que

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \varphi(X_i(t)) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \varphi(X_i(0))) - \sigma_N \int_0^t \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \Delta\varphi(X_i)\right)\\ - \int_0^t \frac{1}{2N^2}\sum_{i,j=1}^N K(X_i-X_j)\cdot(\nabla\varphi(X_i)-\nabla\varphi(X_j)) = M_N(t)\end{aligned}$$

où M_N est une martingale. De façon très informelle, on a donc en prenant l'espérance

$$\partial_t \mathbb{E}[\mu_N] + \nabla\cdot(K * \mathbb{E}[\mu_N]\mathbb{E}[\mu_N]) - \sigma_N \Delta \mathbb{E}[\mu_N] = 0$$

qui est la formulation en vorticité des équations de Navier-Stokes 2D

$$\partial_t \rho + u\cdot\nabla\rho = \sigma\Delta\rho, \qquad u = \int_{\Pi^2} K(x-y)\rho(y)dy\,. \tag{3}$$

Comme dans le cas déterministe, la singularité du noyau de Biot-Savart ne permet d'obtenir la consistance de l'approximation que dans un sens très faible, c'est-à-dire pour des fonctions tests φ très régulières.

1.2. Stabilité des équations de Navier-Stokes 2D en formulation vorticité

Pour démontrer un résultat de convergence, il faut pouvoir assembler la consistance (i.e. le fait que le terme d'erreur dans l'équation est petit) et la stabilité (i.e. le fait que la solution de l'équation est peu sensible à une petite erreur dans l'équation) en trouvant un espace fonctionnel où on sait prouver ces deux propriétés. A cet égard, le cas avec diffusion est meilleur que le cas déterministe car on a la stabilité pour des perturbations peu régulières de l'équation (3).

L'idée est que le terme de dissipation dans l'inégalité d'énergie

$$\frac{1}{2}\|\rho(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \sigma\|\nabla\rho(s)\|_{L^2}^2 ds \leq \frac{1}{2}\|\rho_0\|_{L^2}^2$$

contrôle la régularité $L^2_t(H^1_x)$ de la solution, et permet donc de considérer des perturbations qui sont dans l'espace dual $L^2_t(H^{-1}_x)$. On obtient ainsi très facilement le résultat de stabilité faible suivant :

Proposition 1.3. — *Soient $\rho_0 \in L^2_x$, et (η_n) une suite convergeant vers 0 dans $L^2_t(H^{-1}_x)$. Pour tout n, on considère une solution ρ_n de l'équation perturbée*

$$\partial_t\rho_n + \nabla\cdot((K*\rho_n)\rho_n) = \sigma\Delta\rho_n + \eta_n, \qquad \rho_{n|t=0} = \rho_0\,.$$

Alors, la suite ρ_n converge fortement dans $L^2_{t,x}$ vers la solution de l'équation (3).

Démonstration. — De l'estimation d'énergie

$$\frac{1}{2}\|\rho_n(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \sigma\|\nabla\rho_n(s)\|_{L^2}^2 ds \leq \frac{1}{2}\|\rho_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\eta_n(s)\|_{H^{-1}}\|\rho_n(s)\|_{H^1} ds$$

on déduit la borne uniforme

$$\frac{1}{2}\|\rho_n(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma\|\nabla\rho_n(s)\|_{L^2}^2 ds \leq \frac{1}{2}\|\rho_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\sigma}\int_0^t \|\eta_n(s)\|_{H^{-1}}^2 ds\,.$$

Ceci, couplé avec l'estimation sur $\partial_t\rho_n$ donnée par l'équation d'évolution, montre la compacité de la suite (ρ_n) dans $L^2_{t,x}$. Il suffit alors de passer à la limite au sens des distributions dans l'équation perturbée pour obtenir (3). On conclut grâce à l'unicité de la solution de (3). □

La convergence peut en fait se quantifier, et on a le résultat de stabilité forte suivant :

Proposition 1.4. — *Soient $\rho_0 \in L^2_x$, et (η_n) une suite convergeant vers 0 dans $L^2_t(H^{-1}_x)$. Pour tout n, on considère une solution ρ_n de l'équation perturbée*

$$\partial_t\rho_n + \nabla\cdot((K*\rho_n)\rho_n) = \sigma\Delta\rho_n + \eta_n, \qquad \rho_{n|t=0} = \rho_0\,.$$

Alors,

$$\|(\rho_n-\rho)(t)\|_{L^2}^2 \leq \frac{2}{\sigma}\int_0^t \|\eta_n(s)\|_{H^{-1}}^2 \exp\left(\frac{2}{\sigma}\int_s^t \|\nabla\rho(s')\|_{L^2}^2\right) ds'\,,$$

où ρ est la solution de l'équation (3).

Démonstration. — La différence $\delta_n = \rho_n - \rho$ satisfait l'équation

$$\partial_t \delta_n + (K * \rho_n) \cdot \nabla \delta_n - \sigma \Delta \delta_n = \eta_n - (K * \delta_n) \cdot \nabla \rho$$

d'où l'on déduit que

$$\frac{1}{2}\|\delta_n(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \sigma \|\nabla \delta_n(s)\|_{L^2}^2 ds \leq \int_0^t \left(\|\eta_n(s)\|_{H^{-1}} \|\delta_n(s)\|_{H^1} + \|\nabla \rho(s)\|_{L^2} \|\delta_n(s)\|_{L^4}^2 \right) ds$$
$$\leq \int_0^t \frac{\sigma}{2} \|\nabla \delta_n(s)\|_{L^2}^2 ds + \frac{2}{\sigma} \int_0^t \|\eta_n(s)\|_{H^{-1}}^2 ds + \frac{2}{\sigma} \int_0^t \|\nabla \rho(s)\|_{L^2}^2 \|\delta_n(s)\|_{L^2}^2 ds$$

L'estimation de convergence s'obtient alors en appliquant le lemme de Gronwall. □

Remarque 1.5. — Dans le cas de l'équation (3), il est simple de contrôler la stabilité du terme non linéaire avec les estimations fournies par l'inégalité d'énergie. De façon générale, on peut obtenir un résultat de stabilité plus robuste autour des solutions régulières, dite stabilité fort-faible, en contrôlant simplement le terme de flux par $\|\nabla \rho\|_\infty \|\delta_n\|_{L^2}^2$.

On cherche alors à utiliser des propriétés analogues au niveau du système de vortex, i.e. à montrer que le terme de dissipation aide à contrôler la convergence.

1.3. Résultat de convergence

Une telle approche a été utilisée par Fournier, Hauray et Mischler [9] pour montrer la convergence en loi de la mesure empirique des vortex, et la propagation du chaos des chemins stochastiques.

Comme on ne cherche à décrire que des propriétés statistiques du système à t fixé, il est naturel d'introduire l'équation de Liouville associée au système d'équations différentielles stochastiques (1)

$$\partial_t f_N + \sum_{i=1}^N \nabla_{x_i} \cdot \left(\left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K(x_i - x_j) \right) f_N \right) = \sum_{i=1}^N \sigma_N \, \Delta_{x_i} f_N \tag{4}$$

Dans ce formalisme, f_N représente la probabilité de trouver le système dans l'état $X_N \equiv (x_1, \cdots, x_N)$ à l'instant t, elle est invariante par permutation des $(x_i)_{1 \leq i \leq N}$ à cause de l'échangeabilité, et on obtient la densité à une particule en prenant sa première marginale.

A la limite, on s'attend alors à ce que cette densité à une particule satisfasse (3). La convergence entropique obtenue par Fournier, Hauray et Mischler donne en fait des informations sur toutes les marginales de f_N, donc une quantification de la propriété de chaos. Le domaine considéré dans [9] est $\mathbb{R}^2$, mais la preuve s'étend sans difficulté au cas du tore Π^2.

Théorème 1.6. — *On se donne une mesure de probabilité f_N^0 symétrique, et chaotique au sens entropique, i.e. telle que :*

$$f_N^{0(1)} \to \rho^0 \text{ au sens des mesures,} \quad \text{et } \frac{1}{N} \int_{\Pi^{2N}} f_N^0 \log f_N^0 \, dX^N \to \int_{\Pi^2} \rho^0 \log \rho^0 < +\infty\,,$$

et une distribution initiale de vortex $(X^0_{N,i})_{1\le i\le N}$ *de loi* f^0_N *sur* Π^{2N}.

On considère alors l'unique solution d'Osada $(X_{N,i}(t))_{1\le i\le N, t\ge 0}$ *de (1) avec donnée initiale* $(X^0_{N,i})_{1\le i\le N}$ *et* $\sigma_N = \sigma > 0$.

Alors la mesure empirique $\mu_N(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{X_{N,i}(t)}$ *converge en probabilité dans* $C(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}(\Pi^2))$ *vers l'unique solution de (3) de donnée initiale* ρ^0. *De plus, on a la propagation entropique du chaos*

$$f_N^{(1)}(t) \to \rho(t) \text{ au sens des mesures,} \qquad \text{et } \frac{1}{N}\int_{\Pi^{2N}} f_N(t)\log f_N(t)\, \mathrm{d}X^N \to \int_{\Pi^2} \rho(t)\log\rho(t)\,.$$

Notons que la méthode permet de prendre en compte des vorticités signées en adjoignant à chaque point vortex une valeur algébrique aléatoire donnant la circulation du vortex.

L'approche proposée par Jabin et Wang [16] se rapproche plus de la stratégie utilisée dans la Proposition 1.4 ci-dessus. Le résultat obtenu est plus précis puisqu'il fournit une vitesse de convergence.

Théorème 1.7. — *On se donne une famille de solutions entropiques* (f_N) *de (4) avec* $\sigma_N \ge \underline{\sigma} > 0$ *et donnée initiale* f^0_N.

On considère une solution $\bar\rho \in L^\infty([0,\ T],\ W^{2,p}(\Pi^2))$ *pour tout* $p < \infty$ *de l'équation de champ moyen (3) telle que* $\inf\bar\rho > 0$ *et* $\int_{\Pi^2}\bar\rho = 1$. *On définit l'entropie modulée*

$$\mathcal{H}_N(f_N \mid \bar\rho_N) = \frac{1}{N}\int_{\Pi^{2\,N}} \left(f_N \, \log\frac{f_N}{\bar\rho_N} - f_N + \bar\rho_N\right)\, \mathrm{d}X^N\,.$$

Alors on a l'inégalité de stabilité suivante

$$\mathcal{H}_N(f_N \mid \bar\rho_N)(t) \le e^{\bar M\,(\|K\|+\|K\|^2)\,t}\left(\mathcal{H}_N(f^0_N \mid \bar\rho^0_N) + \frac{1}{N} + \bar M(1 + t\,(1+\|K\|^2))\,|\sigma - \sigma_N|\right),$$

où $\|K\| = \|K\|_{\dot W^{-1,\infty}} + \|\operatorname{div} K\|_{\dot W^{-1,\infty}}$, *et* $\bar M$ *est une constante qui dépend seulement de* $\underline{\sigma}$, *de l'entropie de* f^0_N, *et de* $\bar\rho$ *via les quantités :*

$$\inf\bar\rho,\ \|\bar\rho\|_{W^{1,\infty}},\ \sup_{p\ge 1}\frac{\|\nabla^2\bar\rho\|_{L^p}}{p}$$

Remarque 1.8. — L'équation de Liouville est aussi le point de départ pour l'étude de la limite de champ moyen avec un potentiel Lipschitz dans [12] : la convergence y est quantifiée de façon très simple, à l'aide d'une fonctionnelle équivalente à une distance de Wasserstein.

L'hypothèse cruciale dans le théorème 1.7 est le fait que le noyau de Biot-Savart vérifie

$$K \in \dot W^{-1,\infty}, \qquad \operatorname{div} K \in \dot W^{-1,\infty},$$

ce qui signifie que $K = \bar K + \tilde K$ avec $\tilde K \in L^\infty$, et $\bar K \in \dot W^{-1,\infty}$ à divergence nulle.

Cette représentation est peu usuelle, elle peut s'obtenir par un calcul explicite

$$K = \operatorname{div} \begin{pmatrix} -\varphi \arctan \frac{x_1}{x_2} + \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi \arctan \frac{x_2}{x_1} + \varphi_2 \end{pmatrix}$$

où $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ sont des fonctions régulières sur le tore.

De façon générale, il n'est pas facile de caractériser l'espace $\dot{W}^{-1,\infty}$, mais une série de travaux relativement récents, dûs notamment à Bourgain-Brézis et à Phuc-Torres [4, 20] montre que l'espace de Lorentz $L^{2,\infty}$ s'injecte dans $\dot{W}^{-1,\infty}$ en dimension 2. Cet argument abstrait montre que le théorème peut s'étendre à des interactions beaucoup plus générales avec une singularité en $1/|x|$.

2. LA MÉTHODE D'ENTROPIE RELATIVE

2.1. Principe de stabilité fort-faible

Comme dans la Proposition 1.4, l'idée très naturelle de la preuve consiste à comparer la dynamique des vortex et la dynamique de Navier-Stokes avec une “métrique" bien choisie. Pour que cette “métrique" se comporte bien vis-à-vis de l'évolution, on la construit à partir de l'entropie $\int f_N \log f_N dX^N$ qui est une fonctionnelle de Lyapunov pour l'équation (4), et qui est additive si on a la propriété de chaos. La convergence est alors quantifiée par une inégalité de stabilité fort-faible sur l'entropie modulée

$$\mathcal{H}_N(f_N \mid \bar\rho_N) = \frac{1}{N} \int_{\Pi^{2\,N}} \left(f_N \, \log \frac{f_N}{\bar\rho_N} - f_N + \bar\rho_N \right) \, \mathrm{d}X^N$$

où $\bar\rho_N = \rho^{\otimes N}$ désigne la distribution chaotique attendue à la limite. On peut noter que l'intégrande est positive, et que l'entropie modulée contrôle en particulier $\|f_N - \bar\rho_N\|_{L^1}$.

Les méthodes de ce type, appelées méthodes d'entropie relative (ou méthodes d'énergie modulée si la fonctionnelle de Lyapunov a une structure hilbertienne), ont été utilisées fructueusement pour l'étude de nombreux problèmes dynamiques. On n'en fera pas une revue exhaustive ici mais on peut citer les travaux pionniers de DiPerna [8], de Dafermos [7] et de Yau [22], l'utilisation de ces méthodes pour l'asymptotique d'équations cinétiques collisionnelles et en particulier la limite de Boltzmann vers Navier-Stokes [10, 11] et le travail récent de Serfaty [21] pour la limite de champ moyen des vortex de Ginzburg-Landau.

De façon synthétique, les trois ingrédients fondamentaux des méthodes d'entropie relative sont

— l'inégalité d'entropie pour le système de départ et son analogue sur le système limite, sur la base desquelles on construit l'entropie modulée ;

— la forme spécifique des données initiales (données bien préparées) permettant d'avoir la convergence de l'entropie modulée au temps 0 ;

— la régularité de la solution de l'équation limite pour contrôler la croissance de l'entropie modulée (cf Remarque 1.5).

La difficulté technique consiste à obtenir une bonne décomposition des termes de flux, c'est-à-dire des termes qui apparaissent dans la dérivée temporelle de l'entropie modulée, pour les contrôler en boucle par une estimation de type Gronwall, et montrer que la stabilité est effectivement liée à la régularité de la limite.

Une originalité du travail de Jabin et Wang est d'étendre cette méthode aux limites de champ moyen, où l'équation de départ est posée sur un espace de plus en plus grand. En effet, la convergence entropique suppose qu'on peut décrire de façon essentiellement uniforme la convergence de toutes les marginales (i.e. des probabilités jointes à tous les ordres), ce qu'on n'ose pas vraiment croire a priori ! Le résultat obtenu est donc beaucoup plus fin que ceux obtenus par les méthodes de convergence faible (utilisant par exemple les distances de Wasserstein pour quantifier le chaos, cf [18]).

2.2. Dérivation de l'entropie modulée

La première étape de la preuve consiste à obtenir l'inégalité d'entropie modulée.

LEMME 2.1. — *Avec les notations et les hypothèses du théorème 1.7, on a*

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{H}_N(f_N \mid \bar\rho_N)(t) \\
&\leq -\frac{1}{N^2}\sum_{i,\,j=1}^{N}\int_0^t\int_{\Pi^{2\,N}} f_N\ \left(K(x_i-x_j) - K\star_x\bar\rho(x_i)\right)\cdot\nabla_{x_i}\log\bar\rho_N\ \mathrm{d}X^N \\
&-\frac{1}{N^2}\sum_{i,\,j=1}^{N}\int_0^t\int_{\Pi^{2\,N}} f_N\ \left(\operatorname{div}\,K(x_i-x_j) - \operatorname{div}K\star_x\bar\rho(x_i)\right)\ \mathrm{d}X^N\ \mathrm{d}s \\
&\quad -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_{\Pi^{2\,N}} f_N\left|\nabla_{x_i}\log\frac{f_N}{\bar\rho_N}\right|^2\ \mathrm{d}X^N\ \mathrm{d}s + O(|\sigma-\sigma_N|).
\end{aligned}
$$

Démonstration. — Le point de départ est l'inégalité d'entropie (qui est vérifiée par définition des solutions entropiques de (4))

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Pi^{2\,N}} f_N(t,X^N)\,\log f_N(t,X^N)\ \mathrm{d}X^N + \sigma_N\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_{\Pi^{2\,N}}\frac{|\nabla_{x_i}f_N|^2}{f_N}\ \mathrm{d}X^N\ \mathrm{d}s \\
&\leq \int_{\Pi^{2\,N}} f_N^0\ \log f_N^0\ \mathrm{d}X^N - \frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N}\int_0^t\int_{\Pi^{2\,N}}\operatorname{div}K(x_i-x_j)f_N\ \mathrm{d}X^N\ \mathrm{d}s
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Comme f_N et $\bar\rho_N$ sont des probabilités, il suffit alors de dériver le terme mixte $\int_{\Pi^{2\,N}} f_N\ \log\bar\rho_N\ \mathrm{d}X^N$

L'équation sur $\bar\rho_N$ est obtenue à partir de (3)

$$\partial_t \bar\rho_N + \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K(x_i - x_j) \cdot \nabla_{x_i} \bar\rho_N = \sum_{i=1}^N \sigma\, \Delta_{x_i} \bar\rho_N$$
$$+ \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K(x_i - x_j) - K * \bar\rho(x_i) \right) \cdot \nabla_{x_i} \bar\rho_N - \sum_{i=1}^N \operatorname{div} K * \bar\rho(x_i) \bar\rho_N.$$

En combinant cette équation et la version faible de l'équation de Liouville (4) testée contre $\log \bar\rho_N$, on obtient

$$\int_{\Pi^{2\,N}} f_N \,\log \bar\rho_N \,\mathrm{d}X^N = \int_{\Pi^{2\,N}} f_N^0 \,\log \bar\rho_N^0 \,\mathrm{d}X^N$$
$$+ \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_{\Pi^{2\,N}} f_N \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K(x_i - x_j) - K * \bar\rho(x_i) \right) \cdot \nabla_{x_i} \log \bar\rho_N \,\mathrm{d}X^N \,\mathrm{d}s$$
$$- \int_0^t \int_{\Pi^{2\,N}} f_N \sum_{i=1}^N (\operatorname{div} K * \bar\rho(x_i)) \,\mathrm{d}X^N \,\mathrm{d}s$$
$$+ \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_{\Pi^{2\,N}} \left(\sigma\, f_N \frac{\Delta_{x_i} \bar\rho_N}{\bar\rho_N} - \sigma_N \nabla_{x_i} f_N \cdot \frac{\nabla_{x_i} \bar\rho_N}{\bar\rho_N} \right) \,\mathrm{d}X^N \,\mathrm{d}s.$$

Le dernier terme se couple avec l'information de Fisher qui vient de (5) pour donner la dissipation modulée, moyennant une correction en $\sigma_N - \sigma$:

$$\mathcal{H}_N(f_N \mid \bar\rho_N)(t) \le \mathcal{H}_N(f_N^0 \mid \bar\rho_N^0) - \frac{1}{N} \int_0^t \int_{\Pi^{2\,N}} f_N \left| \nabla_{x_i} \log \frac{f_N}{\bar\rho_N} \right|^2 \,\mathrm{d}X^N \,\mathrm{d}s$$
$$- \frac{1}{N^2} \sum_{i,\,j=1}^N \int_0^t \int_{\Pi^{2\,N}} f_N \,(K(x_i - x_j) - K * \bar\rho(x_i)) \cdot \nabla_{x_i} \log \bar\rho_N \,\mathrm{d}X^N \,\mathrm{d}s$$
$$- \frac{1}{N^2} \sum_{i,\,j=1}^N \int_0^t \int_{\Pi^{2\,N}} f_N \,(\operatorname{div}\, K(x_i - x_j) - \operatorname{div} K * \bar\rho(x_i)) \,\mathrm{d}X^N \,\mathrm{d}s$$
$$+ (\sigma - \sigma_N) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_{\Pi^{2\,N}} f_N \frac{\Delta_{x_i} \bar\rho_N}{\bar\rho_N} \,\mathrm{d}X^N \,\mathrm{d}s$$

Or

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_{\Pi^{2\,N}} f_N \frac{|\nabla_{x_i} \bar\rho_N|^2}{\bar\rho_N^2} \,\mathrm{d}X^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_{\Pi^{2\,N}} f_N \frac{|\nabla_{x_i} \bar\rho(x_i)|^2}{\bar\rho(x_i)^2} \,\mathrm{d}X^N \le \| \log \bar\rho \|_{W^{1,\infty}}^2,$$

et par Cauchy-Schwarz

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_{\Pi^{2\,N}}\nabla_{x_i}f_N\cdot\frac{\nabla_{x_i}\bar\rho_N}{\bar\rho_N}\,\mathrm{d}X^N\,\mathrm{d}s\le\, t\,\|\log\bar\rho\|^2_{W^{1,\infty}}+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_{\Pi^{2\,N}}\frac{|\nabla_{x_i}f_N|^2}{f_N}\,\mathrm{d}X^N$$

$$\le\, t\,\|\log\bar\rho\|^2_{W^{1,\infty}}+\frac{2}{\underline{\sigma}}\frac{1}{N}\int_{\Pi^{2\,N}}f_N^0\,\log f_N^0\,\mathrm{d}X^N+\frac{t\,\|\operatorname{div}K\|^2_{\dot W^{-1,\infty}}}{\underline{\sigma}^2}$$

où on utilise (5) pour majorer l'information de Fisher. Ceci conclut la preuve. □

Les deux termes de flux dans l'inégalité d'entropie modulée

$$-\frac{1}{N^2}\sum_{i,\,j=1}^{N}\int_0^t\int_{\Pi^{2\,N}}f_N\,\left(K(x_i-x_j)-K\star_x\bar\rho(x_i)\right)\cdot\nabla_{x_i}\log\bar\rho_N\,\mathrm{d}X^N$$
$$-\frac{1}{N^2}\sum_{i,\,j=1}^{N}\int_0^t\int_{\Pi^{2\,N}}f_N\,\left(\operatorname{div}\,K(x_i-x_j)-\operatorname{div}K\star_x\bar\rho(x_i)\right)\,\mathrm{d}X^N\,\mathrm{d}s$$

seraient nuls si on remplaçait f_N par $\bar\rho_N$. On cherche donc à les contrôler en fonction de l'entropie modulée, pour pouvoir appliquer un argument de type Gronwall comme dans la preuve de la Proposition 1.4. Une première difficulté ici est d'obtenir une annulation d'ordre deux. L'autre point délicat est lié au fait que l'on n'a plus de structure hilbertienne.

A ce stade, il convient de décomposer $K=\bar K+\tilde K$ avec $\bar K=\nabla\cdot V\in W^{-1,\infty}$ à divergence nulle, et $\tilde K\in L^\infty$ à divergence dans $W^{-1,\infty}$. En intégrant par parties, on a

$$-\frac{1}{N^2}\sum_{i,\,j=1}^{N}\int_{\Pi^{2\,N}}f_N\,\left(\bar K(x_i-x_j)-\bar K\star_x\bar\rho(x_i)\right)\cdot\nabla_{x_i}\log\bar\rho_N\,\mathrm{d}X^N=\bar A+\bar B,$$

avec

$$\bar A=\frac{1}{N^2}\sum_{i,\,j=1}^{N}\int_{\Pi^{d\,N}}\left(V(x_i-x_j)-V\star_x\bar\rho(x_i)\right):\nabla_{x_i}\bar\rho_N\otimes\nabla_{x_i}\frac{f_N}{\bar\rho_N}\,\mathrm{d}X^N,$$
$$\bar B=\frac{1}{N^2}\sum_{i,\,j=1}^{N}\int_{\Pi^{d\,N}}f_N\,\left(V(x_i-x_j)-V\star_x\bar\rho(x_i)\right):\frac{\nabla^2_{x_i}\bar\rho_N}{\bar\rho_N}\,\mathrm{d}X^N$$

et

$$-\frac{1}{N^2}\sum_{i,\,j=1}^{N}\int_{\Pi^{2\,N}}f_N\,\left(\tilde K(x_i-x_j)-\tilde K\star_x\bar\rho(x_i)\right)\cdot\nabla_{x_i}\log\bar\rho_N\,\mathrm{d}X^N$$
$$-\frac{1}{N^2}\sum_{i,\,j=1}^{N}\int_{\Pi^{2\,N}}f_N\,\left(\operatorname{div}\tilde K(x_i-x_j)-\operatorname{div}\tilde K\star_x\bar\rho(x_i)\right)\,\mathrm{d}X^N=\tilde A,$$

avec

$$\tilde{A} = \frac{1}{N^2} \sum_{i,\,j=1}^{N} \int_{\Pi^{d\,N}} \nabla_{x_i} \frac{f_N}{\bar{\rho}_N} \cdot \left(\tilde{K}(x_i - x_j) - \tilde{K} \star_x \bar{\rho}(x_i) \right) \bar{\rho}_N \, \mathrm{d}X^N,$$

2.3. Contrôle des termes de flux

Pour contrôler les termes $\bar{A}$ et $\tilde{A}$, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'information de Fisher modulée

$$\begin{aligned} \bar{A} \leq & \frac{\underline{\sigma}}{4\,N} \sum_{i=1}^{N} \int_{\Pi^{d\,N}} \frac{\bar{\rho}_N^2}{f_N} |\nabla_{x_i} \frac{f_N}{\bar{\rho}_N}|^2 \, \mathrm{d}X^N \\ & + \frac{d}{N\,\underline{\sigma}} \sum_{i=1}^{N} \int_{\Pi^{d\,N}} \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} (V(x_i - x_j) - V \star_x \bar{\rho}(x_i)) \right)^2 \left| \frac{\nabla_{x_i} \bar{\rho}_N}{\bar{\rho}_N} \right|^2 f_N \, \mathrm{d}X^N. \end{aligned} \tag{6}$$

Les termes de flux que l'on doit étudier sont donc tous de la forme $\int \Phi f_N \, \mathrm{d}X^N$ avec

$$\Phi_1 = \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} (V(x_i - x_j) - V * \bar{\rho}(x_i)) \right)^2 \left| \frac{\nabla_{x_i} \bar{\rho}_N}{\bar{\rho}_N} \right|^2 \text{ pour } \bar{A}$$

$$\Phi_2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\tilde{K}(x_i - x_j) - \tilde{K} * \bar{\rho}(x_i) \right) \right)^2 \text{ pour } \tilde{A}$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{N^2} \sum_{i,\,j=1}^{N} (V(x_i - x_j) - V * \bar{\rho}(x_i)) : \frac{\nabla^2_{x_i} \bar{\rho}_N}{\bar{\rho}_N} \text{ pour } \bar{B}$$

Ces termes sont les espérances des variables aléatoires correspondantes par rapport à la loi f_N. Comme on dispose de peu d'informations sur cette loi, il est alors naturel de se ramener aux espérances par rapport à la loi tensorisée $\bar{\rho}_N$. Pour cela, on utilise le lemme suivant

Lemme 2.2. — *Soient f_N et $\bar{\rho}_N$ des mesures de probabilité sur $\Pi^{2\,N}$. Pour toute fonction $\Phi \in L^\infty(\Pi^{2\,N})$, on a pour tout $\lambda > 0$:*

$$\int_{\Pi^{d\,N}} \Phi \, f_N \, \mathrm{d}X^N \leq \frac{1}{\lambda} \left(\mathcal{H}_N(f_N \,|\bar{\rho}_N) + \frac{1}{N} \log \int_{\Pi^{d\,N}} \bar{\rho}_N \, e^{N\lambda\,\Phi} \, \mathrm{d}X^N \right).$$

Démonstration. — L'inégalité est obtenue par un argument simple de convexité : on a en effet que pour toute mesure de probabilité ρ_N

$$\frac{1}{N} \int_{\Pi^{dN}} f_N \log \left(\frac{f_N}{\rho_N} \right) \, \mathrm{d}X^N \geq 0\,.$$

On pose alors

$$\rho_N = \frac{1}{\mathcal{Z}_N} e^{N\lambda\Phi} \bar{\rho}_N \text{ avec } \mathcal{Z}_N = \int_{\Pi^{dN}} e^{N\lambda\Phi} \bar{\rho}_N \, \mathrm{d}X^N\,,$$

et on obtient la majoration attendue. □

Notons qu'avec ce changement de loi, on récupère des facteurs exponentiels. C'est pour cela qu'on impose des bornes L^∞ sur $V, \tilde{K}$, et que l'on doit prouver une loi des grands nombres à échelle exponentielle.

Remarque 2.3. — Le contrôle des termes de flux utilise de façon cruciale l'information de Fisher modulée. En l'absence de bruit, ce terme est nul et la méthode d'entropie relative ne fonctionne pas pour des interactions aussi singulières que celle des vortex considérée ici. Il faut imposer typiquement que K, $\operatorname{div} K \in L^\infty$.

3. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE QUAND $N \to \infty$

3.1. Loi des grands nombres à échelle exponentielle

Pour estimer les termes $\int \Phi_1 f_N \, \mathrm{d}X^N$ et $\int \Phi_2 f_N \, \mathrm{d}X^N$, on va utiliser la structure tensorisée de Φ_1, Φ_2

$$\Phi_1(X_N) = \frac{1}{N} \sum_{j_1, j_2 = 1}^{N} \psi_1(x_i, x_{j_1}) \psi_1(x_i, x_{j_2}) \text{ avec } \psi_1(z, x) = V(z - x) - V * \bar{\rho}(z)$$

$$\Phi_2(X_N) = \frac{1}{N} \sum_{j_1, j_2 = 1}^{N} \psi_2(x_i, x_{j_1}) \psi_2(x_i, x_{j_2}) \text{ avec } \psi_2(z, x) = \tilde{K}(z - x) - \tilde{K} * \bar{\rho}(z) \,,$$

et la condition de moyenne nulle

$$\int_{\Pi^2} \psi_1(z, x) \, \bar{\rho}(x) \, dx = \int_{\Pi^2} \psi_2(z, x) \, \bar{\rho}(x) \, dx = 0$$

Quitte à introduire un facteur multiplicatif λ dans (2.2), on peut supposer de plus que ψ_1, ψ_2 sont assez petits dans $L^\infty(\Pi^{2d})$.

THÉORÈME 3.1. — *Soit $\bar{\rho} \in L^1(\Pi^d)$ une mesure de probabilité, et $\psi \in L^\infty(\Pi^{2d})$ une fonction scalaire telle que*

$$\|\psi\|_{L^\infty} < \gamma,$$

pour γ suffisamment petit, et

$$\forall z, \quad \int_{\Pi^d} \psi(z, x) \, \bar{\rho}(x) \, dx = 0 \,.$$

Alors,

$$\sup_N \int_{\Pi^{dN}} \bar{\rho}_N \exp\left(\frac{1}{N} \sum_{j_1, j_2 = 1}^{N} \psi(x_1, x_{j_1}) \psi(x_1, x_{j_2}) \right) \mathrm{d}X^N < +\infty \,. \tag{7}$$

Le dernier terme $\int \Phi_3 f_N \, \mathrm{d}X^N$ ne peut malheureusement pas être traité de la même façon car on n'a plus la structure produit

$$\Phi_3(X_N) = \frac{1}{N} \sum_{j_1,j_2=1}^{N} \psi_3(x_{j_1}, x_{j_2}) \text{ avec } \psi_3(z,x) = (V(z-x) - V * \bar\rho(z)) : \frac{\nabla^2 \bar\rho(z)}{\bar\rho(z)}$$

Il faut donc utiliser un raffinement du résultat précédent, basé sur la double annulation

$$\int_{\Pi^d} \psi_3(z,x)\,\bar\rho(x)\,dx = 0 \quad \forall z, \qquad \int_{\Pi^d} \psi_3(z,x)\,\bar\rho(z)\,dz = 0 \quad \forall x.$$

La première annulation vient simplement de la définition de la convolution, la seconde est obtenue par intégration par parties en utilisant la condition de divergence nulle

$$\begin{aligned}\int_{\Pi^d} \psi_3(z,x)\,\bar\rho(z)\,dz &= -\int_{\Pi^d} \big(\bar K(z-x) - \bar K * \bar\rho(z)\big)\,\nabla\bar\rho(z)\,dz \\ &= \int_{\Pi^d} \big(\operatorname{div} \bar K(z-x) - \operatorname{div} \bar K * \bar\rho(z)\big)\,\bar\rho(z)\,dz = 0\,.\end{aligned}$$

THÉORÈME 3.2. — *Soit $\bar\rho \in L^1(\Pi^d)$ une mesure de probabilité, et $\phi \in L^\infty(\Pi^{2d})$ une fonction telle que*

$$\left(\sup_{p\geq 1} \frac{\|\sup_z |\phi(.,z)|\|_{L^p(\bar\rho\,\mathrm{d}x)}}{p}\right)^2 < \gamma,$$

pour γ suffisamment petit, et vérifiant les annulations

$$\int_{\Pi^d} \phi(x,z)\,\bar\rho(x)\,dx = 0 \quad \forall z, \qquad \int_{\Pi^d} \phi(x,z)\,\bar\rho(z)\,dz = 0 \quad \forall x.$$

Alors

$$\sup_N \int_{\Pi^{d\,N}} \bar\rho_N \exp\left(\frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N} \phi(x_i,x_j)\right) \mathrm{d}X^N < +\infty. \tag{8}$$

Ce deuxième résultat nécessite une analyse combinatoire beaucoup plus fine. Notons que, si on suppose que ϕ est continue, cette estimation découle d'un résultat de grande déviation obtenu par Benarous et Brunaud [1] :

THÉORÈME 3.3. — *Soit ϕ une fonction continue et bornée sur Π^{2d}. On considère, pour toute mesure ρ, la fonctionnelle $\mathcal{F}$ définie par*

$$\mathcal{F}(\rho) = \int \rho \log\frac{\rho}{\bar\rho} - \int \phi(x,y)\rho(dx)\rho(dy)\,,$$

si ρ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et $+\infty$ sinon.

On note M l'ensemble des minimiseurs de $\mathcal{F}$, $\Theta_\rho : f \mapsto \int f(\cdot)\rho(y)\phi(\cdot,y)dy$, et on suppose que tous les minima ρ sont non dégénérés au sens que le noyau de $Id - \Theta_\rho$ est réduit à 0.

Alors M est un ensemble fini et

$$\lim_{N\to\infty} \exp(N\min\mathcal{F}) \int_{\Pi^{2dN}} \exp\left(\frac{1}{N}\sum_{i,j}\phi(x_i,x_j)\right) \bar\rho_N \,\mathrm{d}X^N = \sum_{\rho\in M} (\det(Id - \Theta_\rho))^{-1/2}\,.$$

On peut en effet montrer avec un argument simple de convexité que l'hypothèse de petitesse dans le théorème 3.2, combinée avec les annulations

$$\int_{\Pi^d} \phi(x,y)\bar{\rho}(x)dx = \int_{\Pi^d} \phi(x,y)\bar{\rho}(y)dy = 0,$$

implique que $\min \mathcal{F} = 0$ et que l'unique minimiseur est $\bar{\rho}$. L'hypothèse de non dégérescence se vérifie alors de façon directe puisque

$$\det(Id - \Theta_\rho) \geq \exp\left(- \int_{\Pi^d} \phi(x,x)\bar{\rho}(x)dx - C \int_{\Pi^{2d}} |\phi(x,y)|^2 \bar{\rho}(x)\bar{\rho}(y)dxdy \right) .$$

3.2. Estimations des moments polynomiaux

La preuve du théorème 3.2 proposée par Jabin et Wang repose sur le développement en série de l'exponentielle dans

$$\int_{\Pi^{d\,N}} \bar{\rho}_N \exp\left(\frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N \phi(x_i, x_j) \right) \mathrm{d}X^N .$$

Comme $e^z + e^{-z} = 2\sum_k z^{2k}/(2k)!$, il suffit en fait d'estimer les moments polynomiaux d'ordre pair :

$$\frac{1}{(2k)!} \int_{\Pi^{d\,N}} \bar{\rho}_N \left(\frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N \phi(x_i, x_j) \right)^{2k} \mathrm{d}X^N .$$

On va montrer que cette série est majorée par une série géométrique du type $C^k M^{2k}$ où

$$M = \sup_{p\geq 1} \frac{\| \sup_z |\phi(x_{i_1}, z)| \|_{L^p(\bar{\rho}\,dx)}}{p} .$$

La petitesse de M assure alors la convergence de la série.

• Si $4k > N$, le facteur combinatoire est compensé par le factoriel $(2k)!$.
On a en effet l'identité

$$\frac{1}{(2k)!} \int_{\Pi^{d\,N}} \bar{\rho}_N \left| \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N \phi(x_i, x_j) \right|^{2k} \mathrm{d}X^N \leq e^{2k} M^{2k} \sum_{\substack{a_1 + \cdots + a_N = 2k, \\ a_1 \geq 0, \cdots a_N \geq 0}} 1,$$

en utilisant la formule de Stirling.

Il suffit alors de compter le nombre de N-uplets $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$ d'entiers positifs dont la somme est $2k$, ou de façon équivalente en posant $c_i = i + \sum_{j\leq i} a_j$, de dénombrer

$$|\{(c_1, c_2, \cdots, c_{N-1}) \mid 1 \leq c_1 < c_2 < \cdots < c_{N-1} \leq N + 2k - 1\}| = \binom{N+2k-1}{N-1}.$$

On conclut finalement, de nouveau grâce à la formule de Stirling, que

$$\frac{1}{(2k)!} \int_{\Pi^{d\,N}} \bar{\rho}_N \left| \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N \phi(x_i, x_j) \right|^{2k} \mathrm{d}X^N \leq C^k M^{2k}.$$

• Si $4 \leq 4k \leq N$, cette estimation simple ne fonctionne pas car on obtient un majorant qui diverge comme $N^{2k}/(2k)!$. Il faut alors utiliser les hypothèses d'annulation

$$\int_{\Pi^d} \phi(x,z)\,\bar\rho(x)\,dx = 0 \quad \forall z, \qquad \int_{\Pi^d} \phi(x,z)\,\bar\rho(z)\,dz = 0 \quad \forall x.$$

pour se débarrasser de la plupart des termes dans la somme.

La majoration s'obtient alors par un comptage (approximatif) des multi-indices $I_{2k} = (i_1, \ldots, i_{2k})$, $J_{2k} = (j_1, \ldots, j_{2k})$ qui peuvent donner des termes

$$\int_{\Pi^{d\,N}} \bar\rho_N \phi(x_{i_1}, x_{j_1}) \cdots \phi(x_{i_{2k}}, x_{j_{2k}})\, \mathrm{d}X^N \neq 0\,.$$

Ce comptage est présenté brièvement dans le paragraphe qui suit.

3.3. Combinatoire

On note $(a_1, a_2, \cdots, a_N)$ les multiplicités de I_{2k},

$$a_l = |\{1 \leq \nu \leq 2k | i_\nu = l\}|, \quad l = 1, 2, \cdots, N,$$

et $(b_1, \cdots, b_N)$ les multiplicités de J_{2k}.

Pour l'étude des annulations, le paramètre critique est le nombre de multiplicités dans I_{2k} qui sont exactement égales à 1. On définit alors

$$m_I = |\{l \mid a_l = 1\}|, \quad n_I = |\{l \mid a_l > 1\}|. \tag{9}$$

• La première étape est de réduire le problème en utilisant la symétrie par permutations.

On dit qu'un multi-indice I_{2k} est sous forme réduite si $0 < a_1 \leq a_2 \ldots \leq a_n$ et $a_{n+1} = \cdots = a_N = 0$, et on note $I_{2k} \in \mathcal{R}_{N,2k}$. Autrement dit, si $I_{2k} \in \mathcal{R}_{N,2k}$, on a

$$\begin{aligned} a_l &= 1 \quad \text{for } l = 1, \cdots, m_I, \\ a_l &> 1 \quad \text{for } l = m_I + 1, \cdots, m_I + n_I, \\ a_l &= 0 \quad \text{for } l > m_I + n_I. \end{aligned}$$

• On exhibe ensuite un ensemble d'indices de J_{2k} qui vont donner une intégrale nulle, et peuvent donc être retirés de la somme.

Pour tout m, n, on définit $\mathcal{J}_{m,n}$ l'ensemble des indices J_{2k} de multiplicités $(b_1, \ldots, b_N)$ satisfaisant

— $b_l \geq 1$ pour tout $l = 1 \ldots m$;
— $b_l \neq 1$ pour tout $l > m + n$.

L'hypothèse

$$\int_{\Pi^d} \phi(x,z)\,\bar\rho(x)\,dx = 0 \quad \forall z, \qquad \int_{\Pi^d} \phi(x,z)\,\bar\rho(z)\,dz = 0 \quad \forall x.$$

implique clairement que

Lemme 3.4. — *Pour tout $I_{2k} \in \mathcal{R}_{N,2k}$ et tout $J_{2k} \notin \mathcal{J}_{m_I,n_I}$, il existe au moins un indice qui n'est pas répété. On a alors*

$$\int_{\Pi^{d\,N}} \bar{\rho}_N \, \phi(x_{i_1}, x_{j_1}) \cdots \phi(x_{i_{2k}}, x_{j_{2k}}) \, \mathrm{d}X^N = 0.$$

On note que cette condition ne détermine pas tous les indices qui donnent une intégrale nulle, mais elle s'écrit assez simplement en fonction des deux entiers m_I, n_I, ce qui simplifie un peu le comptage.

• La partie la plus technique consiste à estimer le nombre de termes qu'on a alors gardés dans la somme.

Lemme 3.5. — *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$|\mathcal{J}_{m,n}| \leq C^k \, N^{k-m/2} \, k^{k+m/2} \, .$$

Démonstration. — Un multi-indice J_{2k} appartient à $\mathcal{J}_{m,n}$ si et seulement si $b_l \geq 1$ pour $l \leq m$ et $b_l = 0,\, 2,\, 3, ...$ pour $l > m + n$. On distingue alors les $l > m + n$ pour lesquels $b_l = 0$ et ceux pour lesquels $b_l \geq 2$. On note p le nombre d'indices pour lesquels $b_l \geq 2$.
- Pour $p = 0, 1, \ldots, \lfloor \frac{2k-m}{2} \rfloor$, il y a $\binom{N-m-n}{p}$ choix de p indices $l_1, \ldots, l_p \in [m+n+1, N]$.
- Une fois que ces indices $l_1, \ldots, l_p$ sont fixés, l'ensemble des $J_{2k} \in \mathcal{J}_{m,n}$ est donné par

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{m,n,p,l_1,\ldots,l_p} = \Big\{ &(b_1, \ldots, b_N) \mid b_1, \ldots, b_m \geq 1, \;\; b_{l_1}, \ldots, b_{l_p} \geq 2, \\ &b_l = 0 \text{ si } l > m + n \text{ et } l \neq l_1, \ldots, l_p, \;\text{ et } b_1 + b_2 + \cdots + b_N = 2k \big\}.\end{aligned}$$

- Quand toutes les multiplicités sont connues, on peut compter le nombre de J_{2k} dans $\mathcal{J}_{m,n}$, en utilisant la relation multinomiale

$$\left| \Big\{ (i_1, \ldots, i_p) \in \{1, \ldots, q\}^p \mid \forall l \;\, a_l = |\{k \,,\; i_k = l\}| \Big\} \right| = \frac{p!}{a_1! \cdots a_q!}.$$

On obtient finalement que

$$|\mathcal{J}_{m,n}| = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{2k-m}{2} \rfloor} \; \sum_{l_1,\ldots,l_p = m+n+1,\ldots,N} \; \sum_{(b_1,\ldots,b_N) \in \mathcal{B}_{m,n,p,l_1,\ldots,l_p}} \frac{(2k)!}{b_1! \cdots b_N!}.$$

Des calculs basés notamment sur la formule de Stirling permettent alors d'obtenir le lemme 3.5. □

• En utilisant la borne uniforme pour les termes non nuls

$$\int_{\Pi^{d\,N}} \bar{\rho}_N \, (\sup_z |\phi(x_1, z)|)^{a_1} \ldots (\sup_z |\phi(x_N, z)|)^{a_N} \; \mathrm{d}X^N \leq e^{2k} M^{2k} \, a_1! \cdots a_N!,$$

et le comptage de ces termes non nuls, on a finalement pour $4 \leq 4k \leq N$

$$\frac{1}{(2k)!}\int_{\Pi^{d\,N}} \bar\rho_N \left|\frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N}\phi(x_i,x_j)\right|^{2k} \mathrm{d}X^N \leq C^k M^{2k}.$$

3.4. Conclusion

En combinant l'estimation par l'information de Fisher (6), l'inégalité de convexité du Lemme 2.2 et les lois des grands nombres à échelle exponentielle des Théorèmes 3.1 et 3.2, on montre que les termes de flux $\bar{A}, \tilde{A}, \bar{B}$ sont contrôlés par l'entropie modulée, modulo des termes d'erreur de l'ordre de $1/N$.
En insérant cette estimation dans l'inégalité du Lemme 2.1, on obtient finalement

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{H}_N(f_N \mid \bar\rho_N)(t) \leq \frac{1}{\lambda}\mathcal{H}_N(f_N \mid \bar\rho_N)(t) + O(|\sigma-\sigma_N|) + O\left(\frac{1}{N}\right)\\ - \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_{\Pi^{2\,N}} f_N \left|\nabla_{x_i}\log\frac{f_N}{\bar\rho_N}\right|^2 \mathrm{d}X^N\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

On conlut alors en appliquant le lemme de Gronwall.

L'inégalité de stabilité ainsi obtenue donne une vitesse de convergence vers la limite de champ moyen en $O(1/N)$, qui est l'échelle attendue pour les fluctuations. Une question naturelle est alors de savoir si cette méthode permet de caractériser les fluctuations, pour lesquelles on s'attend à voir apparaître des corrélations et donc de l'irréversibilité.

RÉFÉRENCES

[1] G. BENAROUS, M. BRUNAUD – *Méthode de Laplace : étude variationnelle des fluctuations de diffusions de type "champ moyen"*. Stochastics and Stochastics Reports **31**, 79–144.

[2] T. BODINEAU, A. GUIONNET – *About the stationary states of vortex systems.* Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **35** (1999), 205–237.

[3] G. BOROT, A. GUIONNET, K. KOZLOWSKI – *Large-N asymptotic expansion for mean field models with Coulomb gas interaction.* Int. Math. Res. Not. **20** (2015), 10451– 10524.

[4] J. BOURGAIN, H. BREZIS – *On the equation* $\operatorname{div} Y = f$ *and application to control of phases.* J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 393–426.

[5] E. CAGLIOTI, P.-L. LIONS, C. MARCHIORO, M. PULVIRENTI – *A Special Class of Stationary Flows for Two-Dimensional Euler Equations : A Statistical Mechanics Description.* Comm. Math. Phys. **143** (1992), 501–525.

[6] E. CEPA, D. LEPINGLE, *Diffusing particles with electrostatic repulsion.* Probab. Theory Rel. Fields **107** (1997), 429–449.

[7] C.M. DAFERMOS. *The second law of thermodynamics and stability.* Arch. Rational Mech. Anal. **70** (1979), 167–179.

[8] R.J. DIPERNA – *Uniqueness of solutions to hyperbolic conservation laws*, Indiana Univ. Math. J. **28** (1979), 137–187.

[9] N. FOURNIER, M. HAURAY, S. MISCHLER – *Propagation of chaos for the 2d viscous vortex model.* J. Eur. Math. Soc. **16** (2014), 1425–1466.

[10] F. BOUCHUT, F. GOLSE, M. PULVIRENTI – " Kinetic equations and asymptotic theory", L. Desvillettes & B. Perthame ed., Series in Applied Mathematics (Paris), 4 (2000).

[11] F. GOLSE, D. LEVERMORE, L. SAINT-RAYMOND – *La méthode de l'entropie relative pour les limites hydrodynamiques de modèles cinétiques.* Séminaire : Equations aux Dérivées Partielles, 1999–2000, Exp. No. XIX.

[12] F. GOLSE, C. MOUHOT, T. PAUL. *On the Mean Field and Classical Limits of Quantum Mechanics.* Comm. Math. Physics, **3**43 (2016), 165–205.

[13] J. GOODMAN, T. HOU, J. LOWENGRUB. *Convergence of the point vortex method for the 2-D Euler equations.* Comm. Pure Appl. Math. **43** (1990), 415Ð430.

[14] M.-K. KIESSLING, *Statistical mechanics of classical particles with logarithmic interactions.* Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), 27–56.

[15] P.-E. JABIN, Z. WANG – *Mean field limit and propagation of chaos for Vlasov Systems with bounded forces.* J. Funct. Anal. **271** (2016), 3588–3627.

[16] P.-E. JABIN, Z. WANG – *Quantitative estimates of propagation of chaos for stochastic systems with $W^{-1,\infty}$ kernels*, Soumis (2017).

[17] T. LEBLE, S. SERFATY – *Large deviations for the two-dimensional two-component plasma.* Comm. Math. Phys. **350** (2017), 301– 360.

[18] S. MISCHLER, C. MOUHOT – *Kac's Program in Kinetic Theory.* Invent. Math. **193** (2013), 1–147.

[19] H. OSADA. *A stochastic differential equation arising from the vortex problem.* Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **61** (1986), 333–336.

[20] N.C. PHUC, M. TORRES – *Characterizations of the existence and removable singularities of divergence-measure vector fields.* Indiana Univ. Math. J. **57** (2008), 1573–1597.

[21] S. SERFATY – *Mean Field Limits of the Gross-Pitaevskii and Parabolic Ginzburg-Landau Equations*, JAMS **30** (2017), 713–768

[22] H.T. YAU – *Relative entropy and hydrodynamics of Ginzburg-Landau models.* Lett. Math. Phys. **22** (1991), 63–80.

Laure SAINT–RAYMOND

École normale supérieure de Lyon
U.M.P.A., UMR 5669 du CNRS
46, allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07
E-mail : `laure.saint-raymond@ens-lyon.fr`