Les crashs sont rationnels

Pierre Lescanne
Université de Lyon, École normale supérieure de Lyon, CNRS (LIP),
46 allée d'Italie, 69364 Lyon, France

12 décembre 2011

Résumé

Comme nous le montrons en utilisant les notions d'équilibre dans la théorie des jeux séquentiels infinis, les crashs ou les escalades financières sont rationnels, pour les agents économiques ou environnementaux, qui ont une vision d'un monde infini. Cela va à l'encontre de la vision autorégulatrice d'un monde économique sage et pacifique en équilibre, autrement dit, dans ce contexte, équilibre n'est plus synonyme de stabilité. Nous tentons de tirer de ce constat quelques conséquences méthodologiques et quelques nouveaux modes de pensée que l'on doit adopter, notamment en microéconomie. Parmi ces modes, il y a la coinduction qui est à la base de notre raisonnement sur les jeux infinis.

Abstract

As we show by using notions of equilibrium in infinite sequential games, crashes or financial escalations are rational for economic or environmental agents, who have a vision of an infinite world. This contradicts a picture of a self-regulating, wise and pacific economic world. In other words, in this context, equilibrium is not synonymous of stability. We try to draw, from this statement, methodological consequences and new ways of thinking, especially in microeconomics. Among those new paths, coinduction is the basis of our reasoning in infinite games.

Mots-clés : jeu économique, jeu infini, jeu séquentiel, crash, escalade, microéconomie, bulle spéculative, induction, coinduction.

Keywords : economic game, infinite game, sequential game, crash, escalation, microeconomics, speculative bubble, induction, coinduction.

4

Il y a toujours un peu de folie dans l'amour.
Mais il y a toujours un peu de raison dans la folie.
Friedrich Nietzsche
Ainsi parlait Zarathoustra (1898)

Traders spéculant sans borne, pays endettés, crashs en séries, banqueroutes, consommation échevelée d'énergie. Nos modèles d'une économie auto-régulatrice où les crashs sont improbables sont-ils adaptés ? Sommes-nous sûr de bien comprendre le fonctionnement des agents dans un système ?

La crise des subprimes de 2008 a mis en valeur des facteurs qui ont au moins deux origines. D'une part, elle n'est pas liée aux acteurs, mais à l'interaction entre ces mêmes acteurs. D'autre part les outils actuels de la science économique, fondés sur des concepts élaborés vers le milieu du siècle précédent, ne tiennent pas compte des faits et tendent à plaquer des axiomes et des méthodes sans confrontation à la réalité. Cette crise est donc systémique, en ce sens qu'elle met en cause le système et non les acteurs qui se sont comportés de manière rationnelle, ayant foi en une croissance infinie. Elle est aussi méthodologique et révèle une difficulté des économistes à prendre en compte certains mécanismes.

Nous allons ici nous focaliser sur un phénomène bien connu, celui de l'escalade [1], car, réfuté comme paradoxal, par les tenants de la rationalité des agents, il démontre clairement l'inadaptation des principes de raisonnement classiques. L'escalade consiste à prendre, sans se donner de borne, une série de décisions de plus en plus lourdes de conséquences. Cette fuite en avant frappe aujourd'hui aussi bien l'économie et la finance que le développement social et environnemental. Cette apparente irrationalité a été illustrée par Newton après l'éclatement de l'une des premières bulles spéculatives, celle de la Compagnie des Mers du Sud quand il a déclaré :

> « Je sais calculer le mouvement des planètes, mais je ne sais pas calculer la folie des hommes. »

Car dans l'escalade, les agents ont un comportement tout ce qu'il y a de plus rationnel, à condition qu'ils croient en l'inépuisabilité des ressources, qu'elles soient énergétiques, naturelles ou financières. En effet, le trader ou le financier est rationnel parce qu'il raisonne dans son monde qu'il croit infini et parce qu'il pense pouvoir créer de la monnaie sans fin. Ce qui est curieux, c'est que l'escaladeur peut, de bonne foi, faire monter indéfiniment l'enchère ou l'enjeu quitte à perdre de plus en plus. Pour un observateur externe, le décideur impliqué dans une escalade semble agir contre le bon sens, mais du point de vue du décideur et dans son monde fermé, il est tout à fait raisonnable, comme cela sera démontré par un raisonnement qui implique la mise en œuvre de méthodes subtiles de raisonnement sur l'infini. Nous ne disons pas que l'escalade et le crash qui peut

1. C'est un thème de la littérature, de Macbeth à Madame Bovary.

en être la conséquence sont inéluctables, mais nous affirmons qu'ils sont plausibles parce que l'escalade résulte d'une démarche rationnelle des agents.

1 Vers de nouveaux outils d'analyse des systèmes

> Il est dans la nature humaine de penser sagement et d'agir d'une façon absurde.
>
> *Anatole France*
> Le livre de mon ami

Dans cet article, nous étudions les systèmes à agents, un système étant une organisation de taille plus ou moins grande où les entités élémentaires sont appelées des « agents ». On peut parler d'agent économique ou d'agent écologique. Dans la suite nous emploierons aussi le terme de « joueur », par analogie avec les jeux qui seront notre paradigme. En fonction de son intérêt, un agent prend des décisions qui sont les conséquences de ses préférences ou de l'estimation de ce que ça lui rapporte. Bien sûr ces choix ont une influence sur le comportement global du système. L'un de ces comportements importants qui nous intéresse se manifeste par le fait que le système est en *équilibre*, les décisions des agents étant faites pour maximiser les préférences de chaque agent. En ce sens, équilibre est synonyme de *stabilité*, mais, comme nous le verrons, cela peut aussi coïncider avec une évolution rapide des principaux paramètres du système, comme par exemple la hausse ou la baisse rapide et forte d'un prix. Ainsi, l'équilibre peut résulter en une grande instabilité des paramètres majeurs du système, comme c'est le cas dans l'escalade, qui est le concept sur lequel nous allons nous focaliser. Dans les jeux infinis, équilibre n'est donc plus synonyme de stabilité. Cette propension des agents à l'optimisation est ce que l'on appelle leur « rationalité », autrement dit les agents sont doués de raison et l'utilisent à leur avantage dans leurs décisions. Mais la rationalité a deux facettes, suivant qu'on la mesure de l'extérieur ou de l'intérieur, c'est-à-dire suivant qu'on en a une perception globale ou locale. Ces deux points de vue peuvent donner lieu à des constatations complètement opposées. L'escalade, phénomène particulièrement irrationnel d'un point de vue holistique, ne l'est plus d'un point de vue réductionniste. Dans ce phénomène, plusieurs paradoxes apparaissaient. Premièrement, une rationalité locale, celle des agents pris individuellement, peut résulter en une totale irrationalité quand on l'observe au niveau du système pris dans son entier. Comme l'agent est pris dans son monde, il sera difficile pour un observateur externe de convaincre celui-ci qu'il se trompe. Et quand l'observateur affirmera la rationalité ou l'irrationalité des agents, il devra prendre en compte le niveau où il se place. Deuxièmement un système fondé sur des équilibres peut être chaotique et ainsi le crash peut être la conséquence d'un équilibre. Donc « agents rationnels en équilibre dans leurs décisions », ne veut pas dire, système à évolution lente et régulière.

Les phénomènes de chaos ou d'escalade sont mal compris dans les disciplines scientifiques (nous pensons surtout à la microéconomie), qui basent une partie de leur explication sur les systèmes multi-agents. Comme Jean-Philippe Bouchaud qui affirme que « les sciences économiques ont besoin d'une révolution scientifique »[2], nous affirmons qu'elles requièrent une profonde remise en cause de leurs fondements, de leurs méthodes et de leurs outils. Parmi ces nouveaux outils il y a peut-être ceux de la logique comme elle est développée par une autre grande science des systèmes qu'est l'informatique, au premier rang duquel se trouve bien sûr la coinduction dont nous allons parler.

2 Un cas d'école : McDonald's Restaurants contre Morris & Steel

Dis-moi ce que tu manges, je te dirai ce que tu es.
Anthelme Brillat-Savarin,
La physiologie du goût

Un cas intéressant d'escalade est celui qui opposa la chaîne de restaurants McDonald's à deux militants écologistes anglais, David Morris et Helen Steel[3]. Clairement le management de McDonald's a une politique réfléchie, sait argumenter et s'entoure des meilleurs juristes. Le procès, qui dura dix ans, fut le plus long procès de l'histoire juridique britannique. Les faits commencèrent par une distribution de tracts accusant la chaîne McDonald's de plusieurs méfaits, pas tous justifiés et étayés. S'entourant des stars du barreau londonien et s'appuyant sur le critère de la menace crédible (dont nous parlerons plus loin), c'est-à-dire le fait que le puissant McDonald's fasse peur et sur l'idée qu'une compagnie solide comme McDonald's puisse supporter un procès sans fin[4], la compagnie attaqua les militants en diffamation. Mais deux de ceux-ci décidèrent de se défendre, sur les bases du « rien à perdre », d'une « justice artisanale » et du « vous ne me faites pas peur ». À la fin d'une longue, très longue, procédure, ils furent condamnés, car certaines des déclarations des tracts n'ont pas pu être prouvées comme non diffamatoires. Mais c'est de fait la compagnie qui a perdu. En effet, dans le long mémoire du juge, l'image de marque de McDonald's a été plus qu'écornée. Il a été démontré que les reproches faits par les écologistes sur les conditions de travail, sur l'exploitation des enfants et sur la cruauté envers les animaux étaient fondés. Ceci a été mis en évidence à l'audience dans un grand tapage médiatique. De plus, les

2. J-Ph. Bouchaud. Economics needs a scientific revolution. *Nature*, 455 :1181, oct 2008.

3. John Vidal, McLibel, Burger Culture on Trial, *Macmillan Publishers*, 1997

4. L'auteur a pu mettre en évidence dans le cadre d'un contentieux de consommation la même attitude de la part d'un grand leader français de la distribution de produits ménagers et électroniques. Malheureusement pour cette entreprise une loi récente avait assoupli la procédure de la part du consommateur et l'entreprise l'ignorait ou tout au moins pensait que le consommateur ne la connaissait pas.

militants ont réussi à faire condamner l'État britannique par la Cour européenne des Droits de l'Homme, sur l'argument que la loi britannique ne permettait pas au citoyen de faire des griefs à des grandes compagnies multinationales. Ceci aboutit à un changement de la loi en faveur du citoyen et à des dommages aux requérants. On estime que pour un dédommagement de 60 000 £ (montant que la Cour européenne des Droits de l'Homme trouva d'ailleurs exagéré et que McDonald's n'a pas réclamé), la compagnie McDonald's a perdu 10 000 000 £. Nous sommes typiquement dans un cas d'escalade. Bien que la compagnie vit qu'elle s'enferrait et perdait en image et en frais de procédure, elle ne put accepter la défaite devant la cour de justice et continua donc à argumenter. Il est intéressant de noter qu'un débat préliminaire à l'audience a porté sur la rationalité du processus de décision, la question étant de savoir si on se référerait à la décision d'un juge ou à celle d'un jury. Finalement le jury a été rejeté car plus émotionnel dans ses comportements au profit d'un juge plus rationnel.

3 Les équilibres dans les jeux

Dans tous les processus d'escalade il y a un mécanisme d'interaction – compétition et c'est la compétition qui prime. Très tôt, les philosophes se sont rendus compte que les règles qui gouvernent les activités des groupes d'individus suivent celles des jeux. S'est alors développée la *théorie des jeux*. En effet, comme dans un jeu de société, les hommes coopèrent plus ou moins, mais surtout agissent pour leur propre compte. Très vite est donc apparu le concept de jeu pour décrire comment fonctionnait l'interaction entre les acteurs d'un système, notamment dans les phénomènes économiques. L'acte fondateur de la théorie des jeux est le livre de John von Neumann et Oskar Morgenstern, *Théorie des jeux et comportements économiques*, publié en 1944.

Jean-Jacques Rousseau explique dans son *Discours sur l'origine et les fondements de l'inégalité parmi les hommes* (1775) comment les hommes même acculturés participent à une activité commune en mêlant à la fois une forme d'interaction et un certain égoïsme qui les pousse à choisir une option qui correspond le plus à leur intérêt immédiat. L'exemple qu'il choisit est celui de la chasse au cerf et cet exemple est resté célèbre.

> « Voilà comment les hommes purent insensiblement acquérir quelque idée grossière des engagements mutuels, et de l'avantage de les remplir, mais seulement autant que pouvait l'exiger l'intérêt présent et sensible ; car la prévoyance n'était rien pour eux, et loin de s'occuper d'un avenir éloigné, ils ne songeaient pas même au lendemain. S'agissait-il de prendre un cerf, chacun sentait bien qu'il devait pour cela garder fidèlement son poste ; mais si un lièvre venait à passer à la portée de l'un d'eux, il ne faut pas douter qu'il ne le poursuivît sans

scrupule, et qu'ayant atteint sa proie il ne se souciât fort peu de faire manquer la leur à ses compagnons. »

Dans cette dualité, intérêt collectif – intérêt individuel, l'homme adopte une ligne de conduite de laquelle il n'a aucun intérêt à dévier. Une position stratégique, où les comportements individuels sont bloqués par le fait que les acteurs ne changent plus leurs choix, est appelée un *équilibre*. Dans son ouvrage *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* (1838), l'économiste Antoine-Augustin Cournot met en évidence, dans le cas des duopoles, cette notion d'équilibre, qui n'a pas encore son nom. Deux entreprises sont en compétition pour produire les mêmes objets, elles essaient d'ajuster leur production pour optimiser leurs profits. En calculant les équilibres de Cournot, on peut calculer la quantité optimum que chaque entreprise doit fabriquer pour gagner le plus d'argent. Une des caractéristiques des duopoles de Cournot et de la chasse de Rousseau est l'interaction sans coopération. Nous allons donc par la suite nous intéresser aux jeux non coopératifs où chaque joueur est égoïste et ne cherche pas à aider les autres, même si cette aide peut lui profiter à terme. En restant dans le cadre des jeux non coopératifs, l'on passe de Cournot à John F. Nash qui, en 1947, établit une forme générale d'équilibre que l'on appelle *équilibre de Nash*, qui a eu pour effet d'initier une recherche active sur les jeux non coopératifs. Ces équilibres sont définis sur une forme particulière de jeux que l'on appelle les *jeux en forme normale*. Ce sont les jeux qui se font en un seul coup et où les gains sont immédiatement rapportés. Un exemple typique de jeu en forme normale est le jeu *pierre-papier-ciseaux*. Deux joueurs dévoilent au même moment l'un des trois objets suivants, soit une pierre, soit une feuille de papier, soit une paire de ciseaux. Les règles sont les suivantes :

- le papier l'emporte sur la pierre,
- la pierre l'emporte sur les ciseaux,
- les ciseaux l'emportent sur le papier.

Dans ce cas, chaque joueur doit probabiliser ses choix et sa stratégie optimum est de jouer 1/3 des fois papier, 1/3 des fois pierre et 1/3 des fois ciseaux. Le jeu de l'*appariement des pièces* est une version simplifiée du jeu *pierre-papier-ciseaux*. Deux joueurs, que nous appellerons Alice et Bertrand présentent au même moment une pièce de monnaie, soit côté *pile*, soit côté *face*. La convention est suivante :

- si les deux joueurs choisissent pile ou si les deux joueurs choisissent face, alors c'est Alice qui gagne,
- si les deux joueurs choisissent des côtés différents, alors c'est Bertrand qui gagne.

Là encore les deux joueurs ont intérêt à présenter pile ou face avec une égale probabilité. Nous ne nous étendrons pas trop sur ce type de jeux, car il y a de notre point de vue trop d'arbitraire attribué à la valeur pécuniaire des gains, pourtant au cœur du calcul des probabilités et nous affirmons que les acteurs jouent sans quantifier leurs gains. Les jeux qui nous intéressent sont les jeux

séquentiels non probabilistes, proposés par Harold Kuhn en 1953, et dans la suite les sommes allouées seront symboliques et n'auront pas valeur de nombre. Seul compte pour nous le fait que l'on puisse comparer des entités.

4 Les jeux séquentiels

Je te tiens, tu me tiens
par la barbichette.
Comptine

Dans un jeu séquentiel, les joueurs jouent plusieurs fois, chacun à leur tour, la répartition des gains se faisant à la fin du jeu. Dans ces jeux, il y a plusieurs sortes d'équilibres, mais ceux qui nous intéressent vraiment sont les équilibres dits d'*induction rétrograde*, parce qu'ils traduisent la rationalité des choix des joueurs. Ils sont appelés « rétrogrades », parce qu'ils se calculent en marche arrière, en partant de la fin du jeu. Sans nuire à la généralité, nous considérerons seulement les jeux à deux joueurs. Par exemple, considérons une variante du jeu de l'*appariement des pièces*, où cette fois-ci les joueurs, que nous nommerons Alice et Bertrand, jouent en séquence. Plus précisément, Alice joue d'abord, puis Bertrand, puis Alice à nouveau. En cas, d'appariement (deux piles consécutifs ou deux faces consécutives) Alice gagne un point. Dans le cas contraire, Bertrand gagne un point. Les points sont accumulés et distribués à la fin de la partie. Par exemple si Alice joue pile, puis Bertrand joue face, puis Alice joue pile, il n'y a pas d'appariement, donc Alice ne gagne rien et Bertrand gagne les deux points. Le gain final est 0 pour Alice et 2 pour Bertrand.

Ce jeu possède une stratégie gagnante presqu'évidente, mais il n'est là qu'à titre d'illustration, pour montrer qu'il faut considérer les stratégies même les plus stupides, en vertu de la contrafactualité dont nous parlerons plus loin. Très naturellement, ce jeu se représente par le diagramme de la figure 1 où Alice est identifiée par A et Bertrand est identifié par B, et où les flèches sont les étapes de jeu. L'étiquette p d'une flèche indique que le joueur a joué pile tandis que l'étiquette f indique que le joueur a joué face. Insistons sur le fait que là encore, la valeur donnée aux gains n'a pas de sens hormis le fait qu'ils peuvent être comparés ; ainsi $0 < 1$ et $1 < 2$. Le nombre 0 veut dire que le joueur n'a jamais gagné, le nombre 1 veut dire qu'il a gagné autant de fois que son adversaire et le nombre 2 veut dire qu'il a gagné plus de fois que son adversaire.

Sur le diagramme, chaque joueur a deux choix : soit aller en bas (face), soit aller à droite (pile). Partant du point le plus haut et le plus à gauche, en suivant la flèche étiquetée p, puis la flèche étiquetée f, puis la flèche étiquetée p, on arrive à la fin du jeu. L'inscription $0, 2$ signifie qu'« Alice gagne 0 fois et Bertrand gagne 2 fois ». Appelons $p\,f\,p$ cette ligne de jeu.

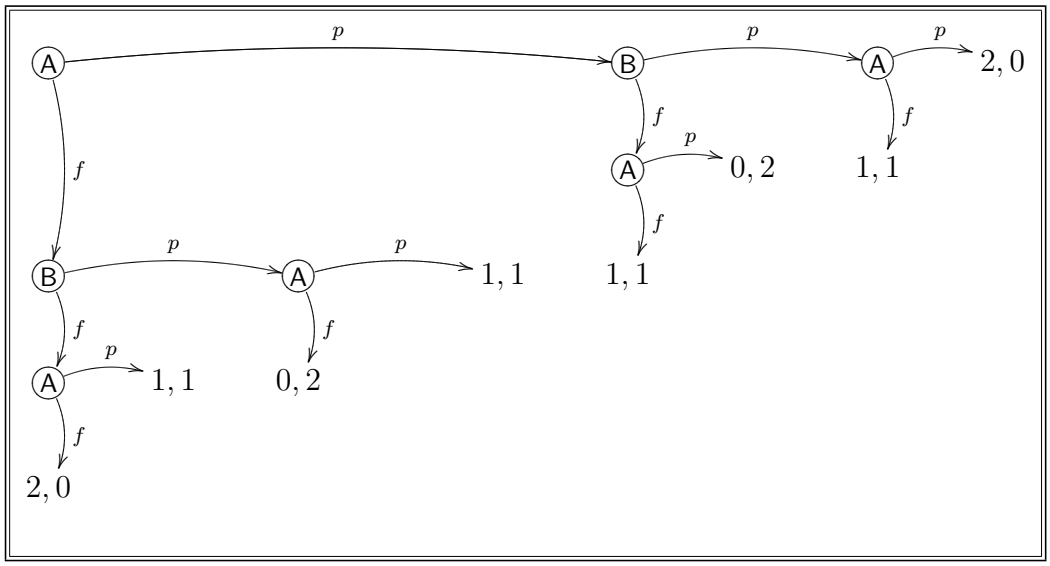


FIGURE 1 – Le jeu séquentiel de l'appariement de la pièce, où A commence, puis B joue, puis A joue à nouveau.

Dans ce jeu, parmi les huit lignes de jeu, deux sont des équilibres (Fig. 2). Ansi dans la ligne de jeu, $p\,f\,f$ qui aboutit à $1, 1$, si Bertrand change son choix en p, alors Alice changera son choix en p et il gagnera 0 fois ; donc il ne le fait pas. Le calcul d'un tel équilibre fait appel à ce que les spécialistes de théorie des jeux appellent une *induction rétrograde*, que les logiciens appellent tout simplement une *induction* ou une *récurrence*. Prenons une position du jeu et considérons les positions qui viennent après (en suivant les flèches). Si l'on regarde de près cette configuration, on constate que c'est aussi un jeu, nous dirons un sous-jeu, car il est complètement inclus dans le jeu de la figure 1. L'idée est d'attribuer à chaque sous-jeu un couple de gains qui correspond à ce que retourne l'équilibre. Pour associer ces couples on part des fins de parties et on remonte vers le début de la partie. Peu à peu, on construit les affectations de gains pour les sous-jeux. On part des fin de jeux, puis on construit des jeux un peu plus grands, puis plus grands encore, pour arriver au jeu le plus grand, c'est à dire le jeu qui nous intéresse. Autrement dit, on construit les équilibres pas à pas. A chaque fois, on choisit pour le joueur dont c'est le tour, le plus grand des gains, et on retient le choix. L'équilibre est la ligne de jeu qui passe par les positions retenues.

Une caractéristique de l'analyse des jeux séquentiels est la contrafactualité [5]. On raisonne dans toutes les situations comme si elles étaient possibles. Or clairement, certaines positions de jeu, situées après que l'un des joueurs a arrêté, ne se produiront pas, mais elles doivent être prises en compte pour expliquer comment les joueurs raisonnent. La contrafactualité joue un rôle encore plus important

5. Un raisonnement est contrafactuel s'il s'appuie sur des hypothèses qui n'ont pas besoin d'être plausibles. « S'il y a des martiens, ils chercheront à communiquer avec nous. »

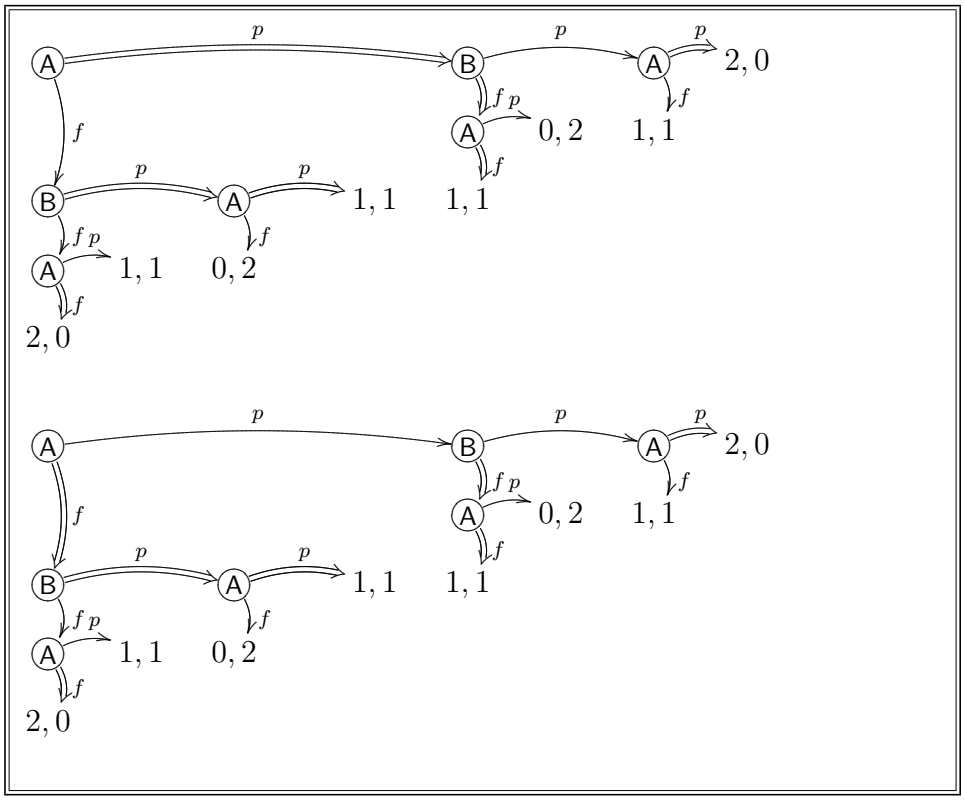


FIGURE 2 – Les deux équilibres du jeu de l'appariement des pièces. *Les doubles flèches correspondent aux choix faits par les joueurs*

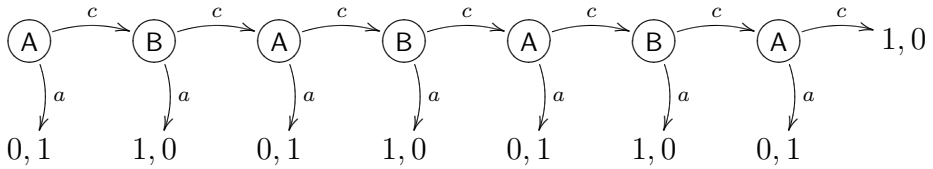
dans le cas des jeux infinis si cruciaux dans l'escalade.

Quel lien entre les équilibres rétrogrades et la rationalité ? Robert Aumann, prix Nobel d'économie en 2005, a démontré en 1995 que les équilibres rétrogrades sont les lignes de jeu rationnelles. Ce sont les lignes de jeu, où tout le monde sait que personne ne peut changer ses choix sans y perdre et tout le monde sait qu'il ne peut pas, en toute rationalité, en être autrement. On dit que les joueurs choisissent ces équilibres à partir de la connaissance commune qu'ils ont de la rationalité des autres joueurs.

5 Les jeux 0,1

Vulnerant omnes
Ultima necat
Phrase placée sur les cadrans solaires,

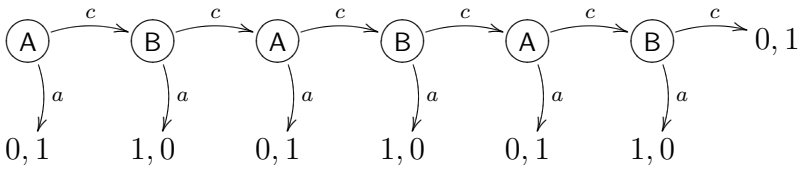
Nous allons nous intéresser à des jeux séquentiels très simples. Dans ces jeux, les joueurs ont le choix d'abandonner (a) ou de continuer (c). Les gains sont $0\,€$ ou $1\,€$ [6]. Concentrons-nous sur le jeu à sept tours.



- Au dernier tour, Alice doit bien sûr choisir c, car elle gagne $1\,€$.
- A l'avant dernier tour, Bertrand a le choix, pauvre choix ! En effet, s'il continue il ne gagne rien et s'il abandonne il ne gagne rien non plus.
- Au cinquième tour, Alice continue car dans tous les cas, elle gagne $1\,€$ et si elle abandonne, elle ne gagne rien du tout.
- Au quatrième tour, Bertrand a le même choix qu'à l'avant dernier tour, à savoir ne rien gagner ou ne rien gagner.
- Au troisième tour, Alice continue.
- Au deuxième tour, Bertrand a le choix entre rien et rien.
- Au début du jeu, Alice ne s'arrête surtout pas.

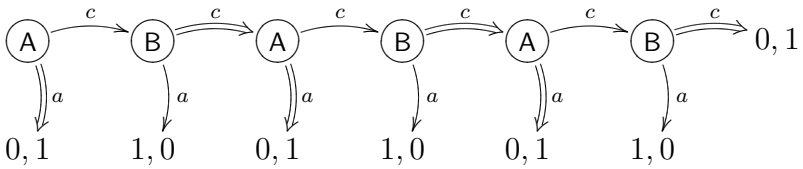
Le jeu $0, 1$ à sept tours a donc plusieurs lignes de jeu rationnelles, qui ont la caractéristique qu'Alice continue toujours et Bertrand fait ce qu'il veut. Considérons maintenant le jeu $0, 1$ à six tours.

6. Pour pimenter le jeu, on pourrait remplacer $1\,€$ par $1\,000\,000\,000\,€$ et donc dire que les joueurs, soit ne reçoivent rien, soit reçoivent un milliard d'euros. Nous insistons sur le fait que la quantité ne compte pas, seule compte la comparaison.



Cette fois-ci les choses changent pour l'équilibre d'induction rétrograde.
- Au dernier tour, Bertrand continue.
- A l'avant dernier et cinquième tour, Alice fait ce qu'elle veut.
- Au quatrième tour Bertrand continue,
- Au troisième tour, Alice fait ce qu'elle veut.
- Etc.

Voici le diagramme de celui où Alice abandonne toujours :



Dans ce jeu, et dans tous les jeux $0,1$ à nombre pair de tours, les lignes de jeu rationelles, c'est-à-dire, les équilibres se situent quand Bertrand continue et Alice fait ce qu'elle veut. Nous examinerons des jeux $0,1$ infinies et nous verrons quels sont les équilibres dans ces jeux.

6 L'enchère à l'américaine

> tous deux
> Marchent droit l'un vers l'autre, et le duel recommence.
> Voilà que par degrés de sa sombre démence
> Le combat les enivre ; il leur revient au cœur
> Ce je ne sais quel dieu qui veut qu'on soit vainqueur,
>
> *Victor Hugo,*
> La Légende des siècles. Le mariage de Roland

Ce jeu a été décrit par le chercheur américain Martin Shubik [7] en 1971, mais il est bien connu en France, sous le nom d'*enchère à l'américaine*. Dans notre pays, il se pratique, par exemple, dans certains mariages et consiste à mettre aux enchères la jarretière de la mariée, le produit de la cagnotte récoltée servant aux jeunes

7. M. Shubik, The dollar auction game : A paradox in noncooperative behavior and escalation. *Journal of Conflict Resolution*, 15(1) :109–111, 1971.

époux à se payer leur voyage de noce ou à s'installer. Dans sa version, Shubik met aux enchères un dollar, mais le but est bien sûr de récolter beaucoup plus que le prix de l'objet. L'enchère à l'américaine consiste à « mettre en vente » l'objet de la manière suivante : chaque fois qu'une personne surenchérit d'un montant de n€, elle doit mettre la somme en question dans un chapeau et cette somme ne lui revient pas. Ainsi que l'écrit Shubik, il est conseillé d'attendre pour démarrer l'enchère que l'ambiance soit bien échauffée, comme c'est le cas à la fin d'une noce et l'on peut se limiter à deux enchérisseurs, car cela ne change pas le phénomène, qui de toute façon la plupart du temps, fait se terminer l'enchère avec deux participants qui ne veulent pas lâcher le morceau. C'est alors que l'on constate un phénomène d'escalade, les enchérisseurs vont payer plus que la valeur de l'objet et plus que ce qu'il pensaient investir à l'origine pour continuer à se battre en vue d'acquérir la jarretière ou le billet vert à l'éffigie de Georges Washington. En fait, ils ont déjà tant investi qu'ils ne veulent pas abandonner l'enchère sans récupérer l'object convoité.

Dans l'analyse de Shubik et dans celle de ses successeurs, on note deux affirmations contradictoires.

- *Pour qu'il y ait escalade, il faut que le jeu soit infini.* Plus précisément, Shubik écrit que « l'analyse doit être restreinte aux jeux infinis, qui n'ont pas de fin spécifique, car aucun phénomène intéressant n'apparait si une borne supérieure [des enchères] est établie ».
- *Shubik et ses successeurs analysent des jeux finis*, puis extrapolent leur résultat au jeu infini.

De là ils concluent faussement que le seul équilibre du jeu est celui où aucun joueur ne commence les enchères et n'enchérit jamais. Le joueur rationnel refuserait donc à tout prix tout type d'escalade. Nous avons pu démontrer que cette ligne de jeu n'est pas un équilibre pour l'enchère à l'américaine. Extrapoler les jeux finis aux jeux infinis, comme le fait Shubik et ceux qui ont repris son raisonnement ou des variantes est une erreur. Nous reviendrons sur la faille de ce mode de raisonnement.

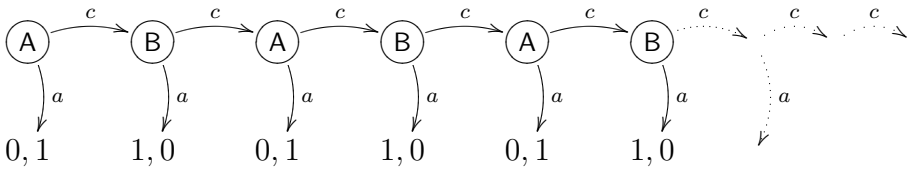
A ce point de la présentation, il faut signaler que quand on raisonne, il y a une différence entre le très très grand et l'infini. La question n'est pas de savoir si l'on se restreint à des nombres qu'on peut imaginer ou concevoir ou même écrire, mais d'affirmer que les nombres n'ont pas de limite.

7 Les jeux séquentiels infinis : retour sur le jeu 0,1

Il marche dans la plaine immense,
Va, vient, lance la graine au loin,
Rouvre sa main, et recommence,
Et je médite, obscur témoin,

Victor Hugo,
Saison des semailles. Le soir

Dans les jeux $0, 1$ nous avons limité le nombre de tours. Mais rien n'empêche de considérer une infinité de tours.



Quels sont les équilibres dans ce cas ? On ne peut plus définir les équilibres par induction rétrograde, mais on peut le faire par une méthode très similaire [8]. Le raisonnement suppose que l'on raisonne sur un objet infini. La base de celui-ci, qui a été conçu pour s'adapter aux objets infinis s'appelle la *coinduction*. On fait donc de la « coinduction rétrograde ». En fait, il y a au moins deux équilibres :

1. Alice abandonne toujours et Bertrand continue toujours (Fig. 3),

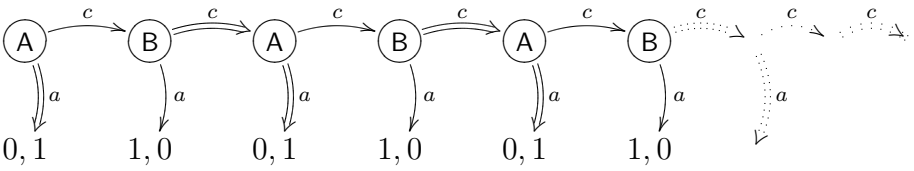


FIGURE 3 – Alice abandonne toujours et Bertrand continue toujours.

2. Alice continue toujours et Bertrand abandonne toujours (Fig. 4).

Justification *(Ce paragraphe peut être sauté en première lecture)* Voyons pourquoi et comment ça marche. Rappelons comment nous procédons dans le cas des jeux finis. Partant des fins de partie, nous examinons une position du jeu. Il y a un joueur et deux sous-jeux dont nous connaissons les équilibres ; nous choisissons comme équilibre celui qui correspond au joueur faisant le choix du meilleur des deux équilibres. Maintenant passons à l'infini et montrons que la ligne où Alice abandonne toujours et Bertrand

8. Les spécialistes à la suite de Selten (1965) parlent d'*équilibres parfaits en sous-jeu*, mais nous proposons de les appeler *équilibres de coinduction rétrograde*.

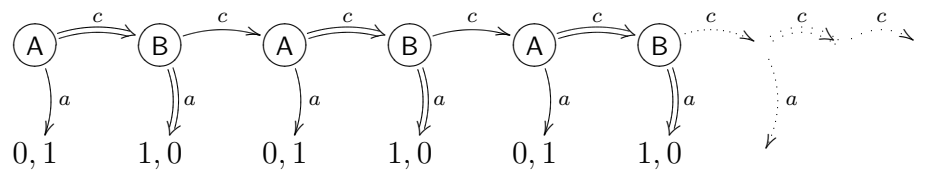


FIGURE 4 – Alice continue toujours et Bertrand continue toujours.

continue toujours est un équilibre. Comme dans le cas de l'induction rétrograde, nous connaissons les équilibres pour les sous-jeux. Dans le cas où c'est le tour de Bertrand, quels sont ces équilibres ? Il y en a deux, l'un correspond à l'abandon de Bertrand et dans l'autre, où Bertrand continue, on a un sous-équilibre où Alice commence. Quel est ce sous-équilibre où Alice commence ? C'est le même équilibre que celui que l'on cherche, à savoir la ligne de jeu où Alice abandonne toujours et Bertrand continue toujours ! Des lignes de jeu optimales que Bertrand a à sa disposition, quel est la meilleure ? Celle où Bertrand continue, puisqu'Alice abandonne et il gagne $1 €$, tandis que s'il abandonne, il ne gagne rien. Donc le bon choix, qui donne l'équilibre, est celui où Bertrand continue, puis Alice abandonne toujours, puis Bertrand continue toujours. Dans le cas où c'est le tour d'Alice, un raisonnement similaire nous montre qu'un équilibre est celui où Alice abandonne toujours et Bertrand continue toujours. Résumons nous : nous avons montré que si on fait l'hypothèse que l'équilibre est la ligne de jeu où Alice abandonne toujours et Bertrand continue toujours, alors l'équilibre est la ligne de jeu où Alice abandonne toujours et Bertrand continue toujours. Peut-être que cette explication un peu alambiquée se comprend mieux sur la figure 5 où nous avons représenté le jeu $0, 1$ de façon plus compacte. Nous semblons tourner en rond. Il n'en est rien ! Et ce raisonnement est bien correct, car l'hypothèse porte sur un sous-jeu strict. Nous l'appellerons *coinduction rétrograde* : co-induction vient du nom *induction* et du préfixe co, « associé à » et rétrograde insiste sur l'analogie avec l'induction rétrograde. En fait, nous avons montré que la ligne de jeu où Alice abandonne toujours et Bertrand continue toujours est un équilibre tout au long du jeu infini, on dit que c'est un « invariant » du jeu infini.

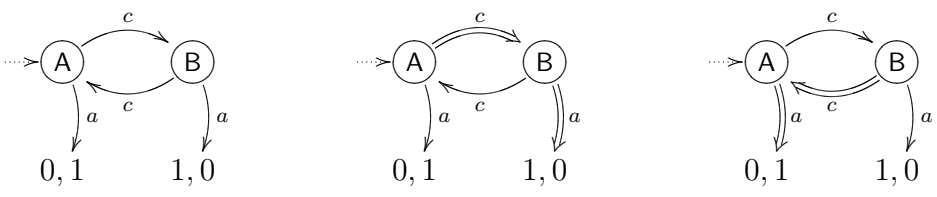


FIGURE 5 – Le jeu $0, 1$ et ses équilibres vus de façon compacte

Le même type de raisonnement s'applique pour l'enchère à l'américaine. C'est un tout petit peu plus compliqué, car ce n'est pas le même jeu qui est un invariant, mais le même jeu paramétré pour tenir compte du fait que les sommes impliquées augmentent. Il y a donc au moins deux équilibres dans l'enchère à l'américaine : l'un des deux joueurs continuant toujours et l'autre abandonnant toujours.

8 L'escalade est rationnelle

> L'exubérance irrationnelle a provoqué une escalade excessive des prix des actions.
>
> *Alan Greenspan,*
> Président de la Réserve fédérale américaine, le 12 mai 1996

Nous connaissons les équilibres du jeu, $0,1$ infini, mais comment cela conduit-il à une escalade ? Analysons la situation en faisant l'hypothèse que nos joueurs ou nos acteurs économiques, sont intelligents mais n'ont pas de mémoire. Ils n'apprennent rien du passé qu'ils oublient immédiatement. Ils savent analyser une situation et comprendre leur intérêt, mais ne savent pas profiter de leur expérience. Ils ne savent pas non plus évaluer les frais annexes et voir une société qui change. Bref, ils sont complètement introvertis et oublieux. A tout moment du jeu, Alice commence un jeu $0,1$ infini. Elle sait qu'elle a deux stratégies rationnelles possibles : continuer aujourd'hui, demain, après-demain et toujours en se disant que Bertrand va avoir peur et abandonner aujourd'hui et toujours dans le futur, ou bien abandonner en pensant que Bertrand continuera toujours. Dans cette deuxième hypothèse, elle prend très au sérieux la détermination de Bertrand de continuer toujours, c'est le phénomène de la *menace crédible* qui est l'attitude des amis de Morris et Steel [9] face à McDonalds. Alice continuera si elle pense qu'elle a impressionné suffisamment Bertrand pour le terroriser et le faire abandonner pour toujours. C'est l'attitude de McDonalds tout au long du procès contre Morris et Steel. « Ça n'est pas possible, ils vont lâcher prise ! » pensaient ses dirigeants. Bertrand est dans la même situation et peut décider de continuer. Si l'on est dans la situation où aucun des participants ne prend la menace de l'autre au sérieux, c'est l'escalade.

Rappelons deux caractéristiques de l'escalade. Comme dans tous les jeux séquentiels, seules comptent les comparaisons. Donc les acteurs manipulent des entités qui sont complètement abstraites : ils ne savent pas combien vaut ce qu'il manipulent, mais seulement comment les entités se comparent. D'autre part, les acteurs ayant, à chaque étape, un choix à faire face à deux (ou plusieurs) options également rationnelles, l'évolution du processus est fortement imprévisible. C'est à ce stade que peuvent intervenir des influences exogènes dans le processus

9. Il y avait cinq distributeurs de tracts, parmi lesquels seuls Morris et Steel ont affronté McDonald's.

de décisions. Puisqu'Alice n'a pas de raisons objectives de choisir entre « continuer » ou « abandonner », elle peut prendre en considération des aspects plus émotionnels ou invoquer d'autres critères raisonnables.

9 L'ubiquité de l'escalade

> Elle s'acheta des plumes d'autruche, de la porcelaine chinoise et des bahuts ; elle empruntait à Félicité, à Mme Lefrançois, à l'hôtelière de la Croix-Rouge, à tout le monde, n'importe où. Avec l'argent qu'elle reçut enfin de Barneville, elle paya deux billets ; les quinze cents autres francs s'écoulèrent. Elle s'engagea de nouveau, et toujours ainsi !
>
> *Gustave Flaubert*
> Madame Bovary

L'escalade est un phénomène très courant dès que les participants sont rationnels et considèrent que les ressources sont infinies. Dans certains cas, c'est un objectif recherché, car c'est la condition de survie, comme dans le cas de la biologie évolutive. Dans sa théorie de la *reine rouge*, Leigh Van Valen décrit la compétition de deux espèces et la condition de survie de chaque espèce qui en résulte : à savoir une adaptation continuelle pour lutter contre le défi de l'autre espèce. L'escalade n'est donc pas un défaut, mais une qualité positive de la pérennisation de l'espèce quand elle a un compétiteur. En revanche, dans le domaine économique, nous savons très bien à quoi peut conduire l'escalade, à savoir des bulles spéculatives qui engendrent de considérables dégâts quand elles éclatent. Ce phénomène est bien connu et la vox populi s'insurge contre l'escalade à travers notamment les mouvements d'Indignés.

Les théories du développement affirment que la terre, sous la forme d'énergies fossiles et le soleil, par son rayonnement, nous fournit des ressources en quantité limitée et donc nous incitent à nous méfier de la fuite en avant. La hausse de la consommation d'énergie (Fig. 6) est une inquiétante escalade.

Dans un autre champ, l'escalade est une composante consubstantielle de la guerre. Du putsch de la Brasserie à son suicide en passant par l'écriture de *Mein Kampf* et la bataille de Stalingrad, la trajectoire d'Adolf Hitler est une escalade. Localement et isolément, Hitler a fait preuve d'une rationalité stratégique.

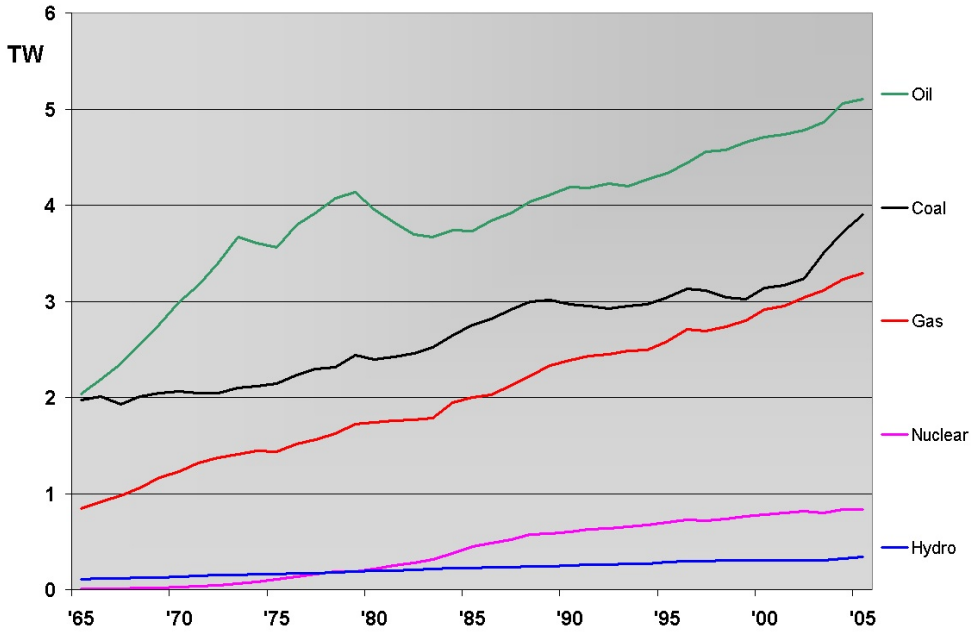


FIGURE 6 – Evolution de la consommation mondiale d'énergie (source Wikipédia)

10 Il n'est pas possible d'extrapoler

Un matin nous partons, le cerveau plein de flamme,
Le cœur gros de rancune et de désirs amers,
Et nous allons, suivant le rythme de la lame,
Berçant notre infini sur le fini des mers.

⋮

Nous voulons, tant ce feu nous brûle le cerveau,
Plonger au fond du gouffre, Enfer ou Ciel, qu'importe ?
Au fond de l'Inconnu pour trouver du nouveau !

Charles Baudelaire
Le voyage

Dans la section 7, nous avons vu que l'erreur du raisonnement de Shubik et de ceux qui l'ont suivi consistait à « élaguer » le jeu infini, puis à extraire un jeu fini, puis à faire un raisonnement sur le jeu fini, puis à extrapoler ce résultat au jeu infini pour en déduire une propriété. Nous avons vu que sur le jeu $0,1$, cette méthode ne peut absolument pas fonctionner : suivant que l'on coupe à une étape paire ou à une étape impaire, on obtient des résultats différents et l'on n'a aucune idée de comment extrapoler. Dans le cas de l'enchère à l'américaine, le problème est plus

vicieux, car les résultats semblent cohérents sur les différentes tailles de jeux finis, encore que cela puisse dépendre de la façon dont on fait la coupure. Ce qui cloche dans l'extrapolation, c'est un fait bien identifié depuis que le mathématicien Weierstrass l'a mis en évidence en 1871 : ce que l'on sait sur le fini ne préjuge en rien de ce que l'on peut dire sur l'infini. Plus précisément, il a montré qu'une propriété bien connue et bien classique des sommes finies de fonctions (le fait d'être dérivables partout, les courbes qui les représentent sont bien lisses), disparait pour les sommes infinies de fonctions (qui peuvent être dérivables nulle part et les courbes qui les représentent être particulièrement rugueuses). Ce résultat a surpris quand il a été publié, car de grands mathématiciens avant lui avaient admis sans démonstration la persistance à l'infini de la dérivabilité. De plus, cela mettait en évidence l'existence de courbes monstrueuses, les courbes sans tangente nulle part, qui, elles mêmes, préfiguraient les fractales de Mandelbrot (voir Fig. 10). En fait, cette erreur dans l'extrapolation remonte à Zénon d'Élée, quand

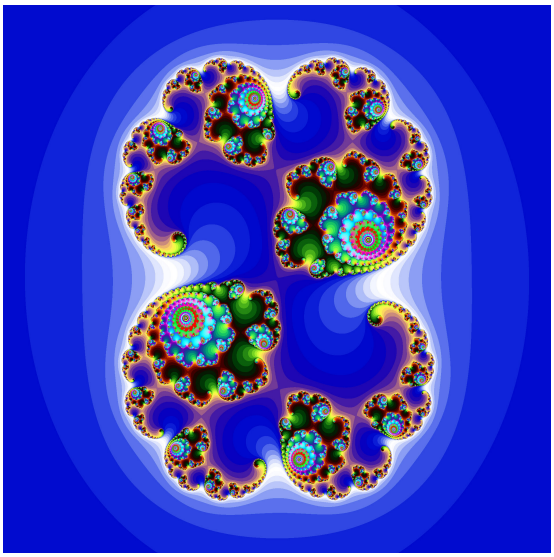


FIGURE 7 – L'ensemble de Julia, dont le contour est un courbe sans tangentes

il affirme qu'Achille ne pourra pas rattraper la tortue, ce qui conduit Zénon à nier le mouvement. En effet, il extrapole le résultat vrai que, sur une course où Achille part derrière la tortue et arrive à l'emplacement d'où la tortue est partie, Achille ne rattrape pas la tortue. Il y a une infinité de telles courses. Mais là où Zénon se trompe, c'est quand il extrapole son résultat, vrai sur une course, à la limite de la suite infinie de ces courses. Son raisonnement étant faux, il ne devrait donc pas pouvoir en conclure qu'Achille ne rattrapera jamais la tortue.

Considérons un autre exemple, à savoir un résultat mathématique récent et facile à comprendre, car fondé sur des concepts connus de Pythagore et Euclide. Une *progression arithmétique* est une suite obtenue en partant d'un certain nombre qui sert d'origine et en ajoutant toujours le même nombre, appelé

la raison. Il n'existe pas de progression arithmétique infinie qui soit faite uniquement de nombres premiers [10]. Mais Ben Green et Terence Tao ont démontré en 2004 qu'il existe des progressions arithmétiques finies arbitrairement longues faites seulement de nombres premiers et ce résultat très difficile a valu à Tao la médaille Fields. On est clairement en face d'un résultat qui n'est pas extrapolable. L'intérêt tout particulier de cet exemple est que le cas fini est incommensurablement plus difficile que le cas infini. Nous étions plus habitués au cas inverse, à savoir que le cas fini est beaucoup plus facile que le cas infini qui nécessité la subtilité de la coinduction.

11 Conclusion

Par une analyse précise de l'infini, nous avons montré que les agents impliqués dans une escalade sont rationnels, de leur point de vue. Par conséquent, nous pensons que les approches qui affirment un peu vite leur irrationalité [11] auraient dû prendre en compte l'analyse coinductive des jeux infinis. L'utilisation de la coinduction et plus généralement des raisonnements sur l'infini doivent donc faire partie des nouveaux fondements des sciences économiques et de leurs outils. Dans ce cadre, équilibre ne rimera pas forcément avec stabilité.

D'autre part, la rationalité interne, celle de l'agent, doit être nettement distinguée de la rationalité externe, celle de l'observateur. L'agent, qui envisage une ressource infinie, est pris dans son introversion et il ne voit que son seul intérêt à court terme ; c'est son rôle. Il ne peut pas ou ne veut pas imaginer une analyse globale, tandis qu'apparait immédiatement à l'observateur l'aberration du comportement du système. Chacun a donc sa rationalité et les points de vue ne sont pas conciliables. Il faudra pourtant que quelqu'un décide si l'on veut éviter l'effondrement.

Références

P. Lescanne. Rationality and Escalation in Infinite Extensive Games. *ArXiv e-prints*, December 2011.

Cet article expose le substrat mathématique et logique de ce qui est présenté ici ainsi qu'une discussion détaillée et une bibliographie complète.

10. nombres divisibles seulement par 1 et par eux-mêmes.

11. que nous ne nions pas, d'autant moins que, devant l'embarras du choix, ils peuvent invoquer des arguments irrationnels pour lever leur perplexité.