

# Une extension bivariée pour la Décomposition Modale Empirique – Application à des bruits blancs complexes

Gabriel RILLING<sup>1</sup>, Patrick FLANDRIN<sup>1</sup>, Paulo GONÇALVES<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire de Physique, École normale supérieure de Lyon, CNRS  
46 allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France

<sup>2</sup>Laboratoire de l'Informatique du Parallélisme, École normale supérieure de Lyon  
46 allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France

`gabriel.rilling@ens-lyon.fr`, `flandrin@ens-lyon.fr`, `paulo.goncalves@inria.fr`

**Résumé** – On propose ici une extension de la Décomposition Modale Empirique (ou EMD pour “Empirical Mode Decomposition”) permettant de traiter des signaux à 2 composantes ou complexes. À la suite de travaux analogues sur l’EMD, on observe que le comportement de cette nouvelle extension sur des bruits blancs complexes est équivalent à un banc de filtres quasi-dyadique.

**Abstract** – A new extension of the Empirical Mode Decomposition (EMD) is proposed for processing bivariate or complex-valued signals. Following similar research on the EMD, the behavior of the new method on complex-valued white noises is then analyzed and shown to be equivalent to a quasi-dyadic filterbank.

## 1 Introduction

Introduite il y a une dizaine d’années par N. E. Huang et ses collaborateurs [1, 2], la technique de Décomposition Modale Empirique (ou EMD pour « Empirical Mode Decomposition ») permet de décomposer tout signal en une somme de composantes oscillantes extraites directement du signal de manière adaptative. Ces composantes, ou IMFs pour « Intrinsic Mode Functions », peuvent être vues comme des formes d’ondes éventuellement non linéaires modulées en amplitude et en fréquence. Dans sa formulation initiale, la méthode n’est applicable que sur des signaux univariés (ou réels). L’objet de cette communication est de proposer une extension de l’EMD au cas de signaux bivariés (ou complexes). Cette extension est déclinée en 2 algorithmes basés sur le même principe mais aux propriétés légèrement différentes. Le lecteur pourra trouver une boîte à outils EMD en libre accès [3] contenant entre autres des codes MATLAB/C mettant en œuvre ces algorithmes et des scripts reproduisant les figures de cet article. Il est à noter que deux autres extensions bivariées ont été proposées très récemment [4, 5]. La première est assez différente de l’approche proposée ici et la deuxième s’avère être un cas particulier peu avantageux de l’Algo. 1 présenté ici en Section 2.2.3.

## 2 Décomposition Modale Empirique de signaux bivariés

### 2.1 Décomposition Modale Empirique

À l’instar de la transformée en ondelettes discrète (TOD), l’EMD originale [1] est une méthode de décomposition ré-

cursive où un signal est décomposé en une partie oscillant rapidement, apparentée au *détail* de la TOD, et une partie oscillant plus lentement, *approximation* dans le cadre de la TOD, qui est ensuite à son tour décomposée selon le même principe. On aboutit ainsi à une décomposition de la forme

$$x(t) = a_K(t) + \sum_{k=1}^K d_k(t), \quad (1)$$

où similairement à la TOD, l’approximation à l’« échelle »  $k$  est la somme de l’approximation et du détail à l’« échelle »  $k + 1$

$$a_k(t) = d_{k+1}(t) + a_{k+1}(t), \quad (2)$$

avec la notable différence que les « échelles » ne correspondent pas à une grille fixée a priori mais sont définies à partir du signal et de manière locale. Plus précisément, la décomposition (2) est obtenue en itérant un opérateur non linéaire adaptatif, conçu pour que les deux composantes ne dépendent du signal que localement à distance de quelques oscillations (i.e., quelques extrema). Cet opérateur, dit de *tamissage* (ou « sifting »), est décrit par la procédure suivante :

- 1 Identifier les extrema de  $a_k(t)$
- 2 Interpoler (par une spline cubique) les minima (resp. maxima), pour définir une « enveloppe »  $e_{min}(t)$  (resp.  $e_{max}(t)$ )
- 3 Calculer la moyenne  $m(t) = \frac{e_{min}(t) + e_{max}(t)}{2}$
- 4 La soustraire au signal  $\mathcal{S}[a_k](t) = a_k(t) - m(t)$

Si on itère  $n$  fois cette procédure, les détails et approximations à l’échelle  $k + 1$  sont définis comme  $d_{k+1}(t) = \mathcal{S}^n[a_k](t)$  et  $a_{k+1}(t) = a_k(t) - d_{k+1}(t)$ .

## 2.2 Décompositions Modales Empiriques bivariées

### 2.2.1 Principe

L'EMD s'appuie fortement sur la notion d'oscillation qu'elle définit à partir des extrema locaux du signal, une oscillation correspondant par exemple au signal entre deux maxima locaux. De ce fait, elle est naturellement confinée à l'analyse de signaux scalaires puisque la notion d'extremum local, et donc d'oscillation, n'existe pas pour des signaux à valeur vectorielle. En revanche, dans le cas des signaux à deux composantes, ou bivariés, on peut considérer la notion de rotation qui est de plus une extension bivariée classique de la notion d'oscillation. Ainsi, le principe sous-jacent à toutes les extensions bivariées proposées [4, 5, 6] à ce jour est de remplacer dans l'EMD usuelle la notion d'oscillation par celle de rotation. Le point de vue adopté est alors de considérer que tout signal bivarié peut être décrit comme *la somme d'une composante (vectorielle) tournant rapidement autour de zéro et d'une autre tournant plus lentement*.

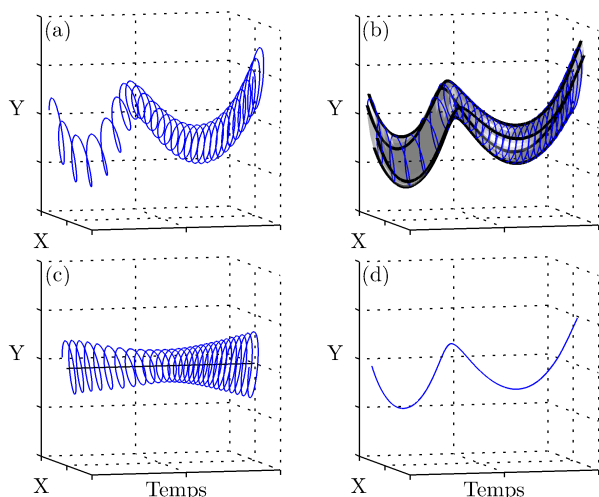


FIG. 1 – Principe des extensions bivariées. (a) Un signal tournant composite. (b) Le signal entouré de son enveloppe 3D. Les lignes noires épaisses sont les « armatures latérales » utilisées pour calculer l'axe central. (c) Composante tournant rapidement. (d) Composante tournant plus lentement = axe du tube en (b).

### 2.2.2 Une enveloppe en 3 dimensions

Techniquement, les extensions bivariées reprennent le principe récursif de l'EMD mais avec de nouveaux opérateurs de tamisage calqués sur l'original. Ainsi, là où classiquement on soustrait la moyenne des enveloppes supérieures et inférieures au signal, les nouveaux opérateurs soustraient au signal l'« axe central » de son « enveloppe », qui est maintenant un tube tridimensionnel qui enveloppe le signal Fig. 1. En pratique, cet axe est en fait calculé à partir de ce qu'on pourrait appeler des « armatures latérales » du tube (cf Fig. 1 (b) lignes épaisses). Chacune de ces armatures est associée à une direction particu-

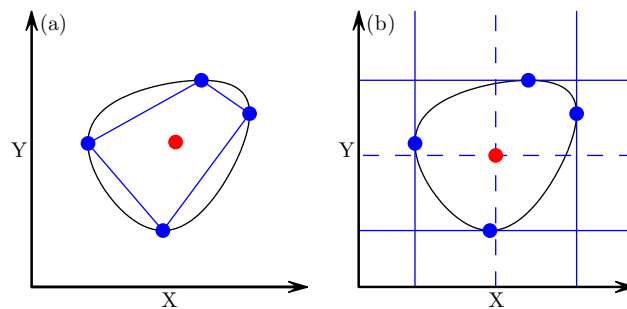


FIG. 2 – Définition de l'axe central de l'enveloppe pour les deux algorithmes. (le script reproduisant cette figure permet de tester d'autres configurations)

lière et forme une ligne de crête de l'enveloppe dans cette direction. Ainsi, l'armature associée à la direction « vers le haut » pourrait être définie à tout instant comme le point de la section du tube dont l'altitude est maximale. Cependant, l'enveloppe n'étant pas connue a priori, les armatures sont calculées différemment. Dans l'esprit de la Fig. 1, on peut considérer que le tube enveloppe devrait être en tout point tangent au signal, ce qui implique que chacune des armatures latérales interpole un certain ensemble de points du signal. De là, sachant qu'une armature représente une ligne de crête du tube dans une certaine direction, il apparaît que les points interpolés sont nécessairement des « extrema du signal dans cette direction », c'est-à-dire des extrema du signal projeté sur cette direction. L'armature est alors simplement définie comme la spline cubique interpolant ces points.

### 2.2.3 Algorithmes

Étant donné un ensemble de telles armatures associées à un ensemble de directions bien réparties dans  $[0, 2\pi]$ , il reste maintenant à définir l'« axe central » de l'enveloppe. Si l'on définit celui-ci indépendamment à chaque instant, le problème est en fait de définir le centre d'un contour fermé dans le plan à partir de  $N$  points. Pour cela, on propose deux méthodes, qui dans le cas de  $N = 4$  points associés aux directions haut, bas, gauche et droite, correspondent à :

1. l'isobarycentre des  $N$  points (cf. Fig. 2 (a)).
2. l'intersection de deux droites, l'une étant à mi-chemin entre les deux tangentes horizontales à la section du tube passant par les points « haut » et « bas », l'autre étant à mi-chemin entre les deux tangentes verticales passant par les points « gauche » et « droite » (cf. Fig. 2 (b)).

À partir de ces deux méthodes on peut alors proposer deux algorithmes Algo. 1 et Algo. 2, où le signal bivarié est assimilé à un signal complexe pour simplifier les écritures. L'algorithme proposé dans [5] correspond à l'Algo. 1 avec  $N = 2$  directions.

Ces deux algorithmes donnent en pratique des résultats souvent différents mais on peut par contre montrer qu'ils sont équivalents dans des cas simples quand  $N$  tend vers l'infini [6]. À noter cependant que l'algorithme Algo. 2 est souvent préférable parce qu'il est nettement moins sensible

**Algorithme 1** : opérateur de tamisage bivarié n° 1

- 1 **pour**  $1 \leq k \leq N$  **faire**
- 2 Projeter le signal  $x(t)$  sur la direction  $\varphi_k$  :  
 $p_{\varphi_k}(t) = \text{Re} \{ e^{-i\varphi_k} x(t) \}$
- 3 Extraire les positions  $\{t_j^k\}$  des maxima de  $p_{\varphi_k}(t)$ .
- 4 Interpoler les points  $\{(t_j^k, x(t_j^k))\}$  pour obtenir l'armature latérale dans la direction  $\varphi_k$  :  $e_{\varphi_k}(t)$ .
- 5 Calculer la moyenne des armatures latérales :  
 $m(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e_{\varphi_k}(t)$
- 6 Soustraire la moyenne au signal :  
 $\mathcal{S}^{B1}[x](t) = x(t) - m(t)$

**Algorithme 2** : opérateur de tamisage bivarié n° 2

- 1 **pour**  $1 \leq k \leq N$  **faire**
- 2 Projeter le signal  $x(t)$  sur la direction  $\varphi_k$  :  
 $p_{\varphi_k}(t) = \text{Re} \{ e^{-i\varphi_k} x(t) \}$
- 3 Extraire les maxima de  $p_{\varphi_k}(t)$  :  $\{t_j^k, p_j^k\}$ .
- 4 Interpoler les points  $\{(t_j^k, e^{i\varphi_k} p_j^k)\}$  pour obtenir la « tangente » dans la direction  $\varphi_k$  :  $e'_{\varphi_k}(t)$ .
- 5 Calculer la moyenne des tangentes :  
 $m(t) = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N e'_{\varphi_k}(t)$
- 6 Soustraire la moyenne au signal :  
 $\mathcal{S}^{B2}[x](t) = x(t) - m(t)$

aux erreurs dues à l'échantillonnage [6]. En revanche, l'algorithme [Algo. 1](#) peut éventuellement être préférable pour des signaux très suréchantillonnés et se prête parfois mieux à une analyse théorique.

## 3 Application à des bruits blancs complexes

### 3.1 Simulations

Appliquée à des bruits large bande, l'EMD est connue pour avoir un comportement en moyenne équivalent à un banc de filtres autosimilaire, quasi-dyadique dans des conditions usuelles [7]. Dans le cas bivarié, nous nous sommes intéressés essentiellement à deux cas : un simple bruit blanc Gaussien complexe, où les parties réelles et imaginaires sont indépendantes, et un bruit blanc Gaussien analytique, c'est à dire un bruit blanc dont le spectre est limité aux fréquences positives.

**Banc de filtres** — Les résultats montrent que le comportement en banc de filtres autosimilaire est conservé par les extensions bivariées et que le facteur d'autosimilarité (dont le logarithme en base 2 n'est autre que le décalage entre les spectres des IMFs d'indices  $k > 1$  dans les bancs de filtres de la [Fig. 3](#)) reste relativement proche de 2 dans des conditions usuelles. Cependant, les caractéristiques du banc de filtres peuvent varier significativement suivant l'algorithme utilisé et le signal analysé (cf [Fig. 3](#)).

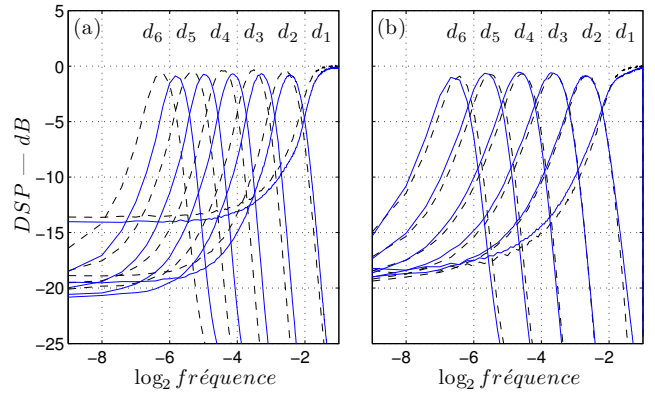


FIG. 3 – Bancs de filtres pour 10 itérations de tamisage par IMF. Pour les deux types de bruit et les deux algorithmes, on représente les densités spectrales moyennes des 6 premiers IMFs obtenus à partir de 10000 réalisations indépendantes de bruits de 512 points chacune en utilisant 32 directions pour le tamisage. (a) Bruit blanc complexe simple. (b) Bruit blanc analytique. Dans les deux cas, le banc de filtres en trait plein bleu correspond au premier algorithme et celui en tirets noirs au deuxième. Seules les parties « fréquences positives » des spectres ont été représentées, les parties négatives étant rigoureusement symétriques pour le bruit blanc simple et de faible amplitude ( $\lesssim -20\text{dB}$ ) pour le bruit blanc analytique.

**Corrélation** — Pour compléter l'étude, il faut également analyser la corrélation entre les IMFs. À cette fin, on s'est intéressé aux interspectres entre les IMFs

$$S_{k,k'}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E} \{ d_k(t) d_{k'}^*(t + \tau) \} e^{-2i\pi f \tau} d\tau, \quad (3)$$

dont les normes ( $l_2$  normalisées par rapport au nombre de points) sont représentées [Fig. 4](#). On constate que les corrélations entre IMFs sont globalement faibles sauf peut-être entre IMFs « voisins », où elles sont de l'ordre de 10 % du produit des normes des spectres des IMFs correspondants, et surtout entre le premier IMF et les autres dans le cas du bruit blanc simple. En comparant ces résultats avec les spectres des IMFs, on voit que la différence de comportements entre les deux situations pourrait être liée au fait que le premier IMF a une composante à basses fréquences qui est nettement plus importante dans le cas du bruit blanc simple. De ce fait, le premier IMF est potentiellement plus corrélé avec les IMFs d'indices grands, essentiellement basses fréquences, que dans le cas du bruit blanc analytique. Si l'on regarde maintenant l'interspectre entre le premier IMF  $d_1(t)$  et la première approximation correspondante  $a_1(t)$  [Fig. 5](#), on observe que pour les deux types de bruits, celui-ci est négatif à basses fréquences et qu'il est nettement plus important dans le cas du bruit blanc simple. Les IMFs d'indice  $k > 1$  étant obtenus à partir de  $a_1(t)$ , on en déduit que le premier IMF est anticorrélé avec les IMFs d'indices supérieurs dans la partie basses fréquences. En pratique, ceci signifie que l'EMD introduit artificiellement de l'information à basses fréquences dans les IMFs qui se compense entre les différents IMFs et qui est donc absente du signal d'origine, ce qui est gênant pour une méthode de décomposition. On remarque par ailleurs

que l'EMD originale présente la même caractéristique en plus accentuée, l'interspectre étant plutôt de l'ordre de 0.15 à basses fréquences.

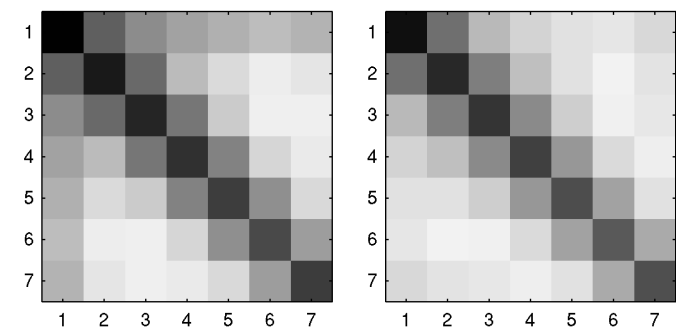


FIG. 4 – Normes des spectres-interspectres moyens des IMFs obtenus avec le deuxième algorithme pour : (a) le bruit blanc simple; (b) le bruit blanc analytique. (codage logarithmique en niveaux de gris, dynamique de 30 dB)

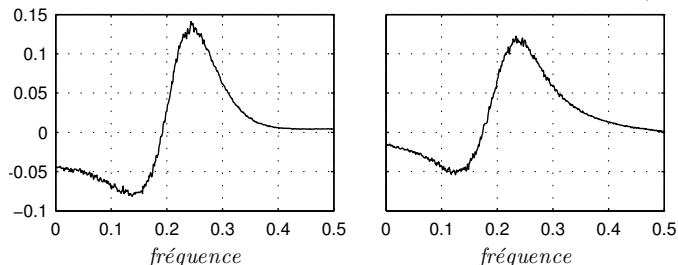


FIG. 5 – Interspectre entre le premier IMF et la première approximation (deuxième algorithme) pour : (a) le bruit blanc simple; (b) le bruit blanc analytique.

### 3.2 Influence des paramètres

Pour un modèle de signal donné, les caractéristiques du banc de filtres peuvent varier en fonction des deux paramètres de l'algorithme que sont le nombre d'itérations de tamisage appliqué pour extraire chaque IMF et le nombre de directions considérées pour calculer l'axe central de l'enveloppe du signal.

**Nombre d'itérations** — Le nombre d'itérations de tamisage agit globalement sur la forme du banc de filtres mais si l'on se restreint à des nombres d'itérations pas trop élevés ( $\lesssim 30$ ), son influence se limite essentiellement au facteur d'autosimilarité du banc de filtres, celui-ci diminuant quand on itère davantage (cf Fig. 6 (a) et (b)). Si de plus on observe que pour un même signal, les bancs de filtres associés aux 2 algorithmes diffèrent essentiellement par le facteur d'autosimilarité qui leur est associé, on voit que ces bancs de filtres peuvent en fait pratiquement se ramener à un seul, à condition d'utiliser différents nombres d'itérations pour les 2 algorithmes.

**Nombre de directions** — Le nombre de directions considérées pour calculer l'axe central du tube a une influence a priori relativement discrète dans la mesure où il ne modifie pratiquement que les allures des spectres pour

le bruit blanc simple et uniquement à très basse fréquence. Plus précisément, la modification est essentiellement apparente sur le premier IMF, dont le contenu basse fréquence diminue quand on augmente le nombre de directions. Sachant que cette composante basses fréquences est indésirable, car elle introduit artificiellement de l'information dans la décomposition, il est plutôt bienvenu qu'un grand nombre de directions permette de la réduire. En revanche, on observe également que cette réduction est limitée dans la mesure où le nombre de directions ne semble plus avoir d'influence au delà de 16. Cette limitation est peut-être liée à une incompatibilité de principe dans le fait de considérer un grand nombre de directions pour estimer la moyenne d'un signal discret non suréchantillonné.

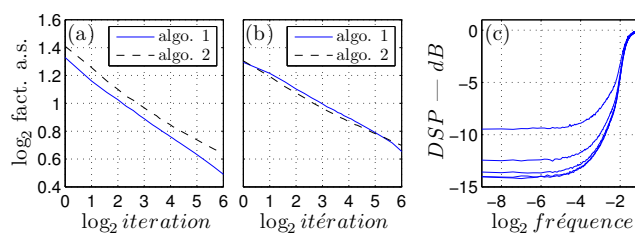


FIG. 6 – Influences des paramètres de l'algorithme : Facteurs d'autosimilarité des bancs de filtres en fonction du nombre d'itérations : (a) bruit blanc simple; (b) bruit blanc analytique. Influence du nombre de directions utilisé pour calculer la moyenne de l'enveloppe : (c) spectres du premier IMF obtenu avec l'algorithme 1 pour, de haut en bas, 4, 8, 16 et 32 directions. Le comportement de l'algorithme 2 étant pratiquement identique, on ne l'a pas superposé pour améliorer la lisibilité.

### Références

- [1] N. E. Huang, Z. Shen, S. R. Long, M. L. Wu, H. H. Shih, Q. Zheng, N. C. Yen, C. C. Tung, and H. H. Liu. The Empirical Mode Decomposition and Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. *Proc. Roy. Soc. London A*, 454 :903–995, 1998.
- [2] N. E. Huang and S. S. P. Shen, editors. *Hilbert–Huang Transform and Its Applications*. World Scientific, 2005.
- [3] <http://perso.ens-lyon.fr/patrick.flandrin/emd.html>.
- [4] T. Tanaka and D. P. Mandic. Complex Empirical Mode Decomposition. *IEEE Sig. Proc. Lett.*, 14(2) :101–104, 2007.
- [5] M. U. Altaf, T. Gautama, T. Tanaka, and D. P. Mandic. Rotation invariant Empirical Mode Decomposition. In *IEEE Int. Conf on Acoust. Speech and Signal Proc.*, Hawaii 2007.
- [6] G. Rilling, P. Flandrin, P. Gonçalves, and J. M. Lilly. Bivariate Empirical Mode Decomposition. *IEEE Sig. Proc. Lett.*, 2007. (à paraître).
- [7] P. Flandrin, G. Rilling, and P. Gonçalves. Empirical Mode Decomposition as a filter bank. *IEEE Sig. Proc. Lett.*, 11(2) :112–114, 2004.