Analyse multifractale d'image : l'apport des coefficients dominants

Herwig Wendt[1], Patrice Abry[1], Stéphane Roux[1], Stéphane Jaffard[2]

[1]Laboratoire de Physique, UMR 5672, CNRS, Ecole Normale Supérieure de Lyon,
46, allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 7, France

[2]Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées, UMR 8050, CNRS, Université Paris XII,
61, Avenue du Général de Gaulle, 94010 Créteil Cedex, France

herwig.wendt@ens-lyon.fr, patrice.abry@ens-lyon.fr,
stephane.roux@ens-lyon.fr, jaffard@univ-paris12.fr

Résumé − Nous nous intéressons à la réalisation pratique d'une procédure effectuant une analyse multifractale de champs scalaires bidimensionnels, c'est-à-dire d'images. L'originalité de la procédure réside dans la construction, à partir des coefficients d'une transformée bidimensionnelle en ondelettes discrètes, de coefficients *dominants*, à partir desquels les attributs multifractals sont estimés. Pour étudier leurs performances, ces estimateurs sont mis en œuvre sur un grand nombre de réalisations de processus synthétiques, dont les propriétés multifractales sont connues théoriquement. Nous validons le fait que l'analyse multifractale 2D, construite sur les coefficients dominants, permet une mesure effective et complète des propriétés multifractales des images analysées. De plus, comparant les résultats obtenus d'images mono-fractales à ceux produits sur des images multifractales, nous commentons de façon détaillée l'apport des coefficients dominants par rapport à l'usage des coefficients d'ondelettes.

Abstract − We investigate the design of a practical procedure aiming at performing the multifractal analysis of images. The originality of the present contribution consists of its being based on wavelet leaders, constructed from the coefficients of the two-dimensional discrete wavelet transform. Multifractal attributes are estimated from the wavelet leaders. To study their performance, these estimators are applied to a large number of realizations of synthetic processes with theoretically known and controlled multifractal properties. We validate the fact that multifractal analysis in 2D, based on Leaders, allows an effective and complete estimation of the multifractal properties of images. In addition, the results obtained on mono- and multi-fractal images allow us to give detailed comments on the respective advantages of Leader and coefficient based estimation procedures.

1 Motivation

Analyse multifractale. Des phénomènes ou propriétés d'invariance d'échelle ont été communément observés dans de nombreuses applications aux natures très différentes. L'analyse multifractale, envisagée comme modèle d'invariance d'échelle, est donc maintenant considérée comme un outil classique pour l'étude de données expérimentales. L'invariance d'échelle est souvent définie comme le comportement en lois de puissance, pour une large gamme d'échelles $a \in [a_m, a_M]$, $\frac{a_M}{a_m} >> 1$ et d'ordres statistiques q, des q-èmes moments empiriques des $T_X(a,\mathbf{k})$: $S(a,q) = \frac{1}{n_a}\sum_{\mathbf{k}} |T_X(a,\mathbf{k})|^q \simeq G_q a^{\zeta(q)}$. Les $T_X(a,\mathbf{k})$ sont des quantités multi-résolution, c'est-à-dire décrivant le contenu d'un processus analysé $X(\mathbf{t})$ à la fois autour d'une position $\mathbf{t}$ et autour d'une échelle d'analyse a. L'analyse pratique de l'invariance d'échelle réside principalement dans l'estimation des *exposants des lois d'échelle* $\zeta(q)$, à partir de données analysées X. Ces $\zeta(q)$ sont ensuite souvent utilisés dans des tâches classiques de traitement du signal telles que détection, identification et classification, ou dans l'interprétation des mécanismes qui sont à l'origine du signal X. En pratique, on choisit souvent pour $T_X(a,\mathbf{k})$ les coefficients de transformées en ondelettes [1, 2, 3, 4].

Images. Quoique l'analyse multifractale s'étende théoriquement sans difficulté particulière aux dimensions supérieures, la plupart des mises en œuvre pratiques se cantonnent aux cas 1D et donc aux signaux (voir, a contrario, [5, 6] pour des applications en 2D). Jusqu'ici, pour l'analyse multifractale pratique 2D, d'images donc, un seul formalisme a été proposé, et est quasi-exclusivement utilisé, celui des *maxima des coefficients* (MMTO) : il repose sur le squelette d'une transformée en ondelettes continue 2D [1, 2]. Cependant, son coût de calcul est très élevé, et la phase de squelettisation est délicate à définir et à mettre en place effectivement.

Coefficients dominants. Elaborant sur des résultats théoriques récents [4, 7] et sur nos précédents travaux réalisés sur des signaux (1D) [8], nous proposons ici une procédure d'analyse multifractale pour les images reposant sur deux ingrédients-clés : utilisation d'une transformée discrète (ou dyadique) 2D en ondelettes ; construction d'un formalisme multifractal reposant sur les *coefficients dominants* plutôt que sur les coefficients d'ondelettes eux-mêmes. D'une part, l'usage d'une transformée en ondelettes discrète permet d'obtenir des coûts de calculs très faibles. D'autre part, il a été montré récemment que les coefficients dominants possèdent les propriétés théoriques

adéquates pour la construction d'un formalisme multifractal : ce sont des quantités monotones croissantes avec l'échelle d'analyse qui rendent compte de façon fine de l'irrégularité de la fonction analysée. Ce formalisme multifractal par coefficients dominants est soutenu par des résultats théoriques montrant qu'il permet une estimation de la totalité du spectre multifractal de la fonction étudiée (notamment de sa partie décroissante), et que cette mesure est plus fine que celle construite directement sur les coefficients d'ondelettes [4, 7].
L'objectif de cette contribution est donc de proposer une mise en œuvre opérationnelle de ce formalisme, d'étudier ses performances pratiques et de les comparer à celles obtenues directement avec les coefficients d'ondelettes. Ces comparaisons sont conduites au moyen de simulations numériques réalisées à partir de processus synthétiques 2D multifractals et monofractals, dont les propriétés sont connues a priori.

2 Formalismes multifractals et coefficients dominants

Analyse multifractale. L'analyse multifractale consiste à décrire les fluctuations de la régularité locale d'une fonction $X(\mathbf{t})$ en fonction de $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$. La régularité est mesurée en comparant localement les fluctuations de X à une lois de puissance : $X(\mathbf{t}_0)$ appartient à $C^\alpha(\mathbf{t}_0)$ avec $\alpha > 0$ s'il existe une constante $C > 0$ et un polynôme P, $deg(P) < \alpha$, tels que $|X(\mathbf{t}) - P_{\mathbf{t}_0}(\mathbf{t})| \leq |\mathbf{t} - \mathbf{t}_0|^\alpha$. L'*exposant de Hölder* est defini comme le supremum de ces α : $h(\mathbf{t}_0) = \sup\{\alpha : X \in C^\alpha(\mathbf{t}_0)\}$. L'information sur la variabilité de la régularité de X est ensuite décrite par le *spectre multifractal* $D(h)$, défini comme la dimension de Hausdorff de l'ensemble des points $\mathbf{t}$ où X prend le même exposant de Hölder h : $D(h) = \dim_H\{\mathbf{t} : h(\mathbf{t}) = h\}$ (voir, par exemple, [4]). L'estimation de $D(h)$ à partir d'une seule observation de X, de durée finie, constitue une question pratique essentielle, qui, pour des données expérimentales, ne peut être abordée qu'à travers les formalismes multifractals.

Coefficients dominants. Soit $\{X(l_1, l_2)\}_{l_1,l_2=1}^N$ l'image analysée, soient $d_X^{(m)}(j, k_1, k_2)$, $m = 1, 2, 3$, les coefficients de la transformée discrète 2D en ondelettes [9]. Introduisons l'indexation d'un carré dyadique

$$\lambda_{j,k_1,k_2} = \left\{[k_1 2^j, (k_1+1)2^j), [k_2 2^j, (k_2+1)2^j)\right\},$$

et dénotons l'union de 9 tels intervalles voisins par $3\lambda_{j,k_1,k_2} = \bigcup_{m,n=\{-1,0,1\}} \lambda_{j,k_1+m,k_2+n}$. Alors, on peut, à partir des $d_X^{(m)}(j, k_1, k_2)$, définir les coefficients dominants par :

$$L_X(j, k_1, k_2) = \sup_{m,\, \lambda' \subset 3\lambda_{j,k_1,k_2}} |d_X^{(m)}(\lambda')|. \qquad (1)$$

En termes simples, le coefficient dominant $L_X(j, k_1, k_2)$ remplace les coefficients d'ondelettes $d_X^{(m)}(j, k_1, k_2)$, $m = 1, 2, 3$, par celui possédant la plus grande valeur absolue parmi tous les coefficients existant dans un voisinage spatial de (k_1, k_2), à toutes les échelles plus fines $2^{j'} \leq 2^j$. Si X possède un exposant de Hölder h en $\mathbf{t}_0$ alors les coefficients dominants le reproduise : $L_X(\mathbf{k}) \leq 2^{jh(\mathbf{t}_0)}, 2^j \to 0$ pour $2^{-j}\mathbf{k} = \mathbf{t}_0$. C'est sur cette propriété-clé que repose l'usage des coefficients dominants pour l'analyse multifractale [4].

Formalismes multifractals. Nous discutons ici deux formalismes multifractals reposant sur les coefficients d'ondelette d'une transformée en ondelette discrète et sur les coefficients dominants. Ces formalismes reposent sur les fonctions de structure :

$$S^L(j, q) = \frac{1}{n_j} \sum_{k_1,k_2} L_X(j, k_1, k_2)^q \qquad (2)$$

$$S^d(j, q) = \frac{1}{3n_j} \sum_{m=1}^{3} \sum_{k_1,k_2} |d_X^{(m)}(j, k_1, k_2)|^q. \qquad (3)$$

L'analyse multifractale énonce essentiellement que ces fonctions de structure se comportent comme une loi de puissance en fonction de l'échelle d'analyse 2^j, dans la limite des petites échelles $2^j \to 0$:

$$S^L(j, q) \approx G_q 2^{j\zeta^L(q)} \text{ ou } S^d(j, q) \approx G'_q 2^{j\zeta^d(q)}. \qquad (4)$$

Le formalisme multifractal met en relation, par une transformée de Legendre, les exposants des lois d'échelle $\zeta^L(q)$ et $\zeta^d(q)$ et le spectre multifractal $D(h)$ de l'image X ; on peut démontrer que $\zeta^L(q)$ ne dépend pas de la base d'ondelettes choisie. Il en est de même, sous une simple hypothèse de régularité uniforme, pour la majoration

$$D(h) \leq \min_{q \neq 0}(1 + qh - \zeta^L(q)). \qquad (5)$$

Ces résultats ne sont donc valables que si le formalisme multifractal est construit sur les coefficients dominants, cf. [4].
L'objectif principal d'une analyse multifractale empirique consiste à estimer les $\zeta(q)$ à partir d'une seule observation du processus aléatoire 2D que représente l'image.

Log-cumulants. Récemment, cependant, il a été suggéré de ré-exprimer ces $\zeta(q)$ par un développement limité au voisinage de $q = 0$: $\zeta(q) = \sum_{p\geq 0} c_p \frac{q^p}{p!}$ [10, 11]. Il a, de plus, été montré que les coefficients, c_p, de ce développement peuvent être exprimés par

$$C_p^{j,L} = c_{0,p}^L + c_p^L \ln 2^j,\ C_p^{j,d} = c_{0,p}^d + c_p^d \ln 2^j, \qquad (6)$$

où les $C_p^{j,L}$ ($C_p^{j,d}$) sont les cumulants des $\ln L_x(j, \cdot, \cdot)$ (respectivement $\ln |d_x(j, \cdot, \cdot)|$). Ce développement est motivé par le fait que ces *log-cumulants*, c_p, soulignent la différence entre deux grandes classes de processus invariants d'échelle : celle dont les $\zeta(q)$ ne sont pas des fonctions linéaires en q, dite multifractale, versus celle dont les $\zeta(q)$ sont linéaires en q ($\forall p \geq 2 : c_p \equiv 0$), correspondant aux processus autosimilaires à accroissements stationnaires et variance finie, souvent dite monofractale.

Procédures d'estimation. Les Eq. (4) et (6) motivent l'estimation des $\zeta(q)$ et c_p à partir de régressions linéaires

de $\log_2(S(j,q))$ et $\hat{C}_p^j$ contre $\log_2|2^j| = j$,

$$\hat{\zeta}(q) = \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \log_2 S(j,q) \quad (7)$$

$$\hat{c}_p = (\log_2 e) \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \hat{C}_p^j. \quad (8)$$

Les w_j satisfont les contraintes habituelles $\sum_{j_1}^{j_2} j w_j \equiv 1$ et $\sum_{j_1}^{j_2} w_j \equiv 0$, et peuvent être exprimés comme $w_j = \frac{1}{b_j}\frac{S_0 j - S_1}{S_0 S_2 - S_1^2}$, avec $S_i = \sum_{j_1}^{j_2} j^i / b_j$, $i = 0, 1, 2$. Les nombres positifs b_j peuvent être choisi librement et reflètent la confiance attribuée à chacune des estimées $S(j,q)$ et $\hat{C}_p^j$.

3 Performances

Processus synthétiques. Les performances statistiques des procédures Eq. (7) et (8) sont analysées par application à un grand nombre, N_{MC}, de réalisations de processus synthétiques 2D de taille $N \times N$. Nous utilisons d'une part, le **mouvement Brownien fractionnaire** (FBM) défini comme le seul processus Gaussien et exactement auto-similaire à accroissements stationnaires [12]. Ses propriétés d'invariance d'échelle sont entièrement déterminées par le seul paramètre H : $\zeta(q) = qH$, et donc $c_1 = H$, $\forall p \geq 2 : c_p \equiv 0$. Son spectre multifractal se réduit à un point : $D(h) = 2\delta(h - H)$. D'autre part, nous analysons les **cascades multiplicatives** de Mandelbrot avec multiplicateurs log-normaux (CMC-LN), voir, par exemple, [13]. Afin d'obtenir des processus ayant une régularité uniforme minimale, les cascades sont intégrées fractionnairement d'ordre $\alpha > 0$. Les CMC-LN sont multifractales, avec $\zeta(q) = c_1 q + \frac{c_2}{2} q^2$, non linéaire en q. Pour les CMC-LN, l'inégalité (5) devient une égalité. Les figures 1(a) et 1(d) proposent un exemple de réalisation de FBM et CMC-LN.

Simulations numériques. Les paramètres de l'étude numérique sont fixés à $N_{MC} = 1000$ et $N = 1024$. Nous fixons $H = 0.7$ pour le FBM, $(c_1, c_2) = (0.5125, -0.0250)$ et $\alpha = 0.5$ pour le CMC-LN. La régression linéaire est réalisée sur la gamme d'échelles $2^3 \leq 2^j \leq 2^7$. Suivant [3], nous choisissons des régressions ponderées, avec des b_j proportionnels aux nombres de coefficients disponibles à chaque échelle.

Spectre multifractal complet. Les figures 1(b) et 1(e) illustrent l'estimation de $\zeta(q)$ et $D(h)$ obtenue pour FBM et de CMC-LN, respectivement. Les résultats montrent qu'une analyse reposant sur les coefficients d'ondelettes permet d'explorer uniquement des moments statistiques $q > -1$ et, en pratique, uniquement la partie croissante du spectre de l'image analysée. Au contraire, la procédure proposée, reposant sur les coefficients dominants, permet de réaliser une analyse complète des propriétés multifractales d'une image, d'obtenir la partie décroissante de son spectre notamment. Pour les moments statistiques q positifs, les biais et variances des deux procédures sont du même ordre de grandeur.

Log-cumulants. Les figures 1(c) et 1(f) mettent en évidence que les estimateurs construits sur les coefficients dominants présentent des variances significativement moindres que celles obtenues avec les coefficients d'ondelettes. Cet effet est notamment particulièrement prononcé pour l'estimation des $c_p, p \geq 2$, qui rendent compte de l'écart à la linéarité des $\zeta(q)$.

Gamme d'échelle pour la régression linéaire. Le tracé des fonctions de structure (cf. figures 1(b) (FBM) et 1(e) (CPC-LN), en haut) suggère d'étendre la gamme d'échelles pour la régression linéaire à $2^2 \leq 2^j \leq 2^7$. Des simulations numériques indiquent que ce choix réduit la variance d'estimation comme attendu, au prix cependant d'une forte augmentation du biais. L'erreur quadratique moyenne de l'estimation s'en trouve plus grande, confirmant ainsi le choix $2^3 \leq 2^j \leq 2^7$. Il est essentiel de noter qu'une difficulté pratique dans l'utilisation des coefficients dominants notamment réside dans la nécessité de ne pas utiliser les premières échelles ($j = 1, 2$), potentiellement disponibles à l'analyse. Le formalisme construit sur la MMTO souffre du même inconvénient.

4 Conclusion

Les résultats décrits ici constituent de claires indications en faveur de l'usage des coefficients dominants pour l'analyse multifractale. La procédure 2D proposée constitue une solution générale, simple, pratique (faible coût de calcul et implantation simple) et effective. Elle s'étend directement aux dimensions supérieures, sans difficulté supplémentaire ni théorique, ni pratique. Les résultats obtenus pour l'analyse des images synthétiques mono- et multifractals sont très encourageants. Ils nous permettent d'envisager, d'une part, l'application de cette procédure d'éstimation à des images réelles, d'autre part, l'incorporation de techniques statistiques de type "bootstrap", pour obtenir à partir d'une seule image, non seulement les estimations des paramètres multifractals eux-mêmes, mais aussi des intervalles de confiance, et des tests statistiques, permettant la distinction entre différents modèles mono- et/ou multifractales.

Références

[1] A. Arneodo, N. Decoster, and S. G. Roux, *A wavelet-based method for multifractal image analysis. i. methodology and test applications on isotropic and anisotropic random rough surfaces*, European Physical Journal B **15**, 567–600, 2000.

[2] A. Arneodo, N. Decoster, P. Kestener, and S.G. Roux, *A wavelet-based method for multifractal image analysis : from theoretical concepts to experimental applications.*, Advances in Imaging and Electron Physics, P.W. Hawkes, Eds., vol. 126, 1–98, Academic Press, 2003.

[3] P. Abry, P. Flandrin, M. Taqqu, and D. Veitch, *Wavelets for the analysis, estimation and synthesis of*

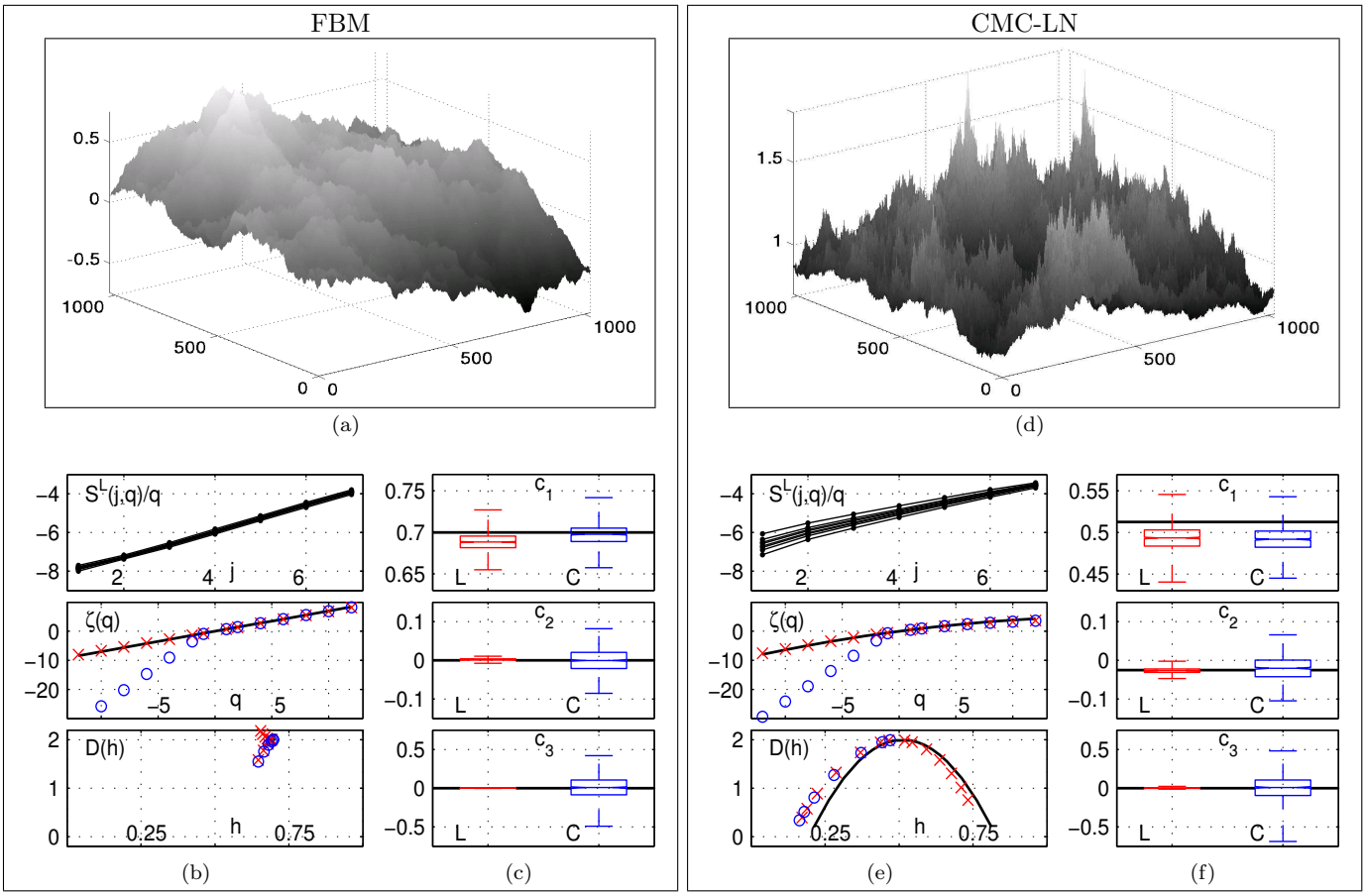


FIG. 1 – (a) *et* (d) *: Une réalisation de FBM et de CMC-LN, respectivement.* (b) *et* (e) *: Fonctions de structure* $S^L(j,q)/q$ *(en haut), estimations de* $\zeta(q)$ *(au milieu) et de* $D(h)$ *(en bas), obtenues à partir des coefficients d'ondelettes* ($\circ$) *et des coefficients dominants* ($\times$) *pour FBM et CMC-LN, respectivement (la courbe noire continue rend compte des valeurs théoriques.). Les coefficients dominants permettent d'obtenir de bonnes estimations des* $\zeta(q)$ *et de la totalité de* $D(h)$ *quand les coefficients d'ondelettes ne fonctionnent que pour* $q > -1$ *et la partie croissante du spectre* $D(h)$*.* (c) *et* (f) *: De haut en bas : "boxplots" des estimations de* c_1*,* c_2 *et* c_3*, (*1000 *réalisations) pour FBM et CMC-LN, respectivement (valeurs théoriques en trait continu). Les estimations reposant sur les coefficients dominants (à gauche) et sur les coefficients d'ondelettes (à droite) sont tracés avec les mêmes échelles. On observe notamment que les estimations pour* c_2 *et* c_3*, obtenues avec les coefficients dominants ont une variance beaucoup plus faible que celles produites avec les coefficients d'ondelettes.*

scaling data, Self-similar Network Traffic and Performance Evaluation, Wiley, spring 2000.

[4] S. Jaffard, *Wavelet techniques in multifractal analysis*, Fractal Geometry and Applications : A Jubilee of Benoît Mandelbrot, M. Lapidus et M. van Frankenhuijsen Eds., Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 72(2), AMS, 91–152, 2004.

[5] V. Sharifi-Salamantian, B. Pesquet-Popescu, J. Simoni-Lafontaine, and J. P. Rigaut, *A robust index for spatial heterogeneity in breast cancer*, Journal of Microscopy **216**, 110–122, 2004.

[6] C.L. Benhamou *et al.*, *Fractal analysis of radiographic trabecular bone texture and bone mineral density : two complementary parameters related to osteoporotic fractures*, J. Bone Miner. Res. **16**, 697–704, 2001.

[7] S. Jaffard, B. Lashermes and P. Abry, "Wavelet leaders in multifractal analysis," in *Wavelet Analysis and Applications, T. Qian, M.I. Vai, X. Yuesheng, Eds.*, Birkhäuser, Basel, Switzerland, 219-264, 2006.

[8] H. Wendt, P. Abry and S. Jaffard, *Bootstrap for Empirical Multifractal Analysis with Application to Hydrodynamic Turbulence* , IEEE Signal Processing Magazine, to appear, 2007.

[9] S. Mallat, *A wavelet tour of signal processing*, Academic Press, San Diego, CA, 1998.

[10] B. Castaing, Y. Gagne, and M. Marchand, *Log-similarity for turbulent flows*, Physica D **68**, 387–400, 1993.

[11] J. Delour, J.F. Muzy, and A. Arneodo, *Intermittency of 1d velocity spatial profiles in turbulence : A magnitude cumulant analysis*, The Euro. Phys. Jour. B **23**, 243–248, 2001.

[12] M.L. Stein, *Fast and exact simulation of fractional brownian surfaces*, J. Comput. Graph. Statist. **11**, no. 3, 587–599, 2002.

[13] B.B. Mandelbrot, *Intermittent turbulence in self-similar cascades ; divergence of high moments and dimension of the carrier*, J. Fluid Mech. **62**, 331–358, 1974.